PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 22. 15. November 1918. 19. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 24 am 8. November 1918.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Müller, Untersuchungen am kontinuierlichen Röntgenspektrum. S. 489.

R. v. Mises, Über die „Ganzzahligkeit" der Atomgewichte und verwandte Fragen. S. 490.

A. Landé, Über Koppelung von Elektronenringen und das optische Drehungsvermögen asymmetrischer Moleküle. S. 500.

A. Szarvassi, Über das Bohrsche Atommodell. S. 505.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1918/19. S. 508.

Personalien. S. 512.

Angebote. S. 512.

Gesuche. S. 512.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Untersuchungen am kontinuierlichen Röntgenspektrum.

Von Alex Müller.

Mit Tafel IX.

1. Einleitung.

In einer im Druck befindlichen, im Juliheft der „Archives des Sciences Physiques et Naturelles" erscheinenden Arbeit werde ich einige Versuche über das kontinuierliche Röntgenspektrum beschreiben. Anlaß zu dieser Arbeit gaben die Unstimmigkeiten, die zwischen den Versuchsresultaten von Rutherford, Barnes und Richardson[1] und Ledoux-Lebard und Dauvillier[2] einerseits, und den Ergebnissen amerikanischer Forscher[3] andrerseits bestehen. Inzwischen ist in dieser Zeitschrift die schöne Arbeit von Lilienfeld[4] erschienen, die Fragen behandelt die auch ich mir gestellt habe. Ich glaube, daß eine kurze Zusammenstellung meiner Versuchsresultate[5] an dieser Stelle nicht überflüssig sein dürfte, um so mehr diese Resultate die quantitative Seite der Frage noch etwas mehr berühren.

2. Beschreibung der Versuche.

Die Fragestellung sei hier der Übersicht halber noch einmal wiederholt. Sie lautet: Existiert im kontinuierlichen Röntgenspektrum eine Grenzwellenlänge λ, die, unabhängig vom Material der Antikathode durch die Einsteinsche Beziehung $e \cdot V = h \cdot c/\lambda$ gegeben ist. Ferner im speziellen: Existiert diese Grenze auch noch im Falle, wo das Potential größer ist als das charakteristische Potential der K-Strahlung.

Die Versuchsanordnung war die folgende: Eine geeignet konstruierte Röntgenröhre, die möglichst große Flächenenergie erzielen ließ, wurde mit einer 8plattigen motorangetriebenen Influenzmaschine betrieben. Das Potential konnte mit Hilfe einer empfindlichen Vakuumregulierung auf ca. 1 bis 2 Proz. konstant gehalten werden. Die zur Prüfung der Einsteinschen Beziehung notwendige Messung der Spannung geschah mit einem absoluten elektrostatischen Voltmeter von Bichat und Blondlot. Die Grenzbandenköpfe wurden mittelst eines kleinen Röntgenspektroskops photographisch registriert, und ihre Lage relativ zu den auf die Platten photographierten Kupferlinien gemessen. (Die Antikathoden konnten mit Leichtigkeit gewechselt werden.) Zur Verwendung gelangten Antikathoden aus Kupfer, Silber und Blei. Zur Prüfung der Frage, ob eine Grenzbande auch jenseits des K-Strahlungspotentials existiere, wurde auf ein und dieselbe Platte eine Aufnahme mit einer Silber- und einer Kupferantikathode gemacht; in beiden Fällen bei gleichem Potential. Die beiden Banden wurden so aufgenommen, daß sie unmittelbar aneinander lagerten. Es zeigte sich, daß die beiden Bandenköpfe innerhalb der Fehlergrenzen die gleiche Lage hatten, und dem Einsteinschen Gesetz entsprachen.

3. Resultate.

Die Resultate sind in der umstehenden Tabelle zusammengestellt.

---

1) Rutherford, Barnes und Richardson, Phil. Mag. 30, 339, 1915.

2) Ledoux-Lebard u. Dauvillier, C. R. 163, 754, 1916.

3) W. Duane u. F. L. Hunt, Phys. Rev. 6, 166, 1915; A. W. Hull, Phys. Rev. 7, 156, 1916; D. L. Webster, Phys. Rev. 7, 403, 1916; F. C. Blake u. W. Duane, Phys. Rev. 9, 568, und 10, 93, 1917.

4) J. E. Lilienfeld, diese Zeitschr. 19, 263, 1918.

5) Ich habe dieselben am 16. Mai d. J. in der Société de Physique in Genf vorgetragen.

Nr.	AK	l_0	l	λ	V	h
1	Cu	5,561	1,32	0,421	28,1	$6,29 \cdot 10^{-27}$
2	Ag	4,903	2,49	0,862	14,6	6,69
3	Cu Ag	4,800	1,96	0,693	18,1	6,67
4	Ag Pb	4,893	1,98	0,700	18,1	6,74
5	Pb	4,887	1,93	0,683	18,1	6,58
6	Pb	4,914	1,73	0,592	20,7	6,50

AK = Antikathoden.
l_0 = Abstand der symmetrisch aufgenommenen Kupfer-K_α-Linien ($\lambda = 1{,}541$ Ångström) in cm (siehe Tafel).
l = Doppelter Abstand des Bandenkopfes von der Plattenmitte in cm.
λ = Wellenlänge des Bandenkopfes in Ångströmeinheiten.
V = Röhrenpotential in Kilovolts.
h = Plancksche Konstante berechnet nach der Gleichung:

$$h = \frac{e}{c}\lambda \cdot V = \frac{4.774 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{V}{0{,}3 \cdot 10^8} \cdot \lambda =$$
$$= 0{,}5308 \cdot 10^{-27} \cdot V \cdot \lambda.$$

Expositionszeiten: 120—270 Minuten.
Stromstärke: 0,4—0,5 Milliampères.

Zu der Tafel ist zu bemerken, daß auf der Platte Nr. 3 die schmälere und unschärfer begrenzte Bande der Kupferaufnahme entspricht. Der Kristall des Spektrometers (Kochsalz) wurde über einen Bereich von ca. 5° geschwenkt, und zwar so, daß der zu erwartende Bandenkopf ungefähr in die Mitte des Schwenkungsbereichs zu liegen kam.

Zusammenfassend dürfte zu bemerken sein, daß das Einsteinsche Gesetz in dem Intervall von 14 bis 28 Kilovolts mit einer Genauigkeit von einigen Prozenten durch die vorliegenden Versuche bestätigt wird. In Analogie mit den Lilienfeldschen Resultaten wurde auch beim Kupfer eine Grenzwellenlänge für ein Potential erhalten, das größer war als das charakteristische K-Potential. Die Planck-sche Konstante, die im Mittel aus den vorliegenden Versuchen resultiert, ist:

$$h = 6{,}58 \cdot 10^{-27} + 0{,}07 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}.$$

in genügender Übereinstimmung mit den bis dato bekannten Werten.

Nachtrag bei der Korrektur:

Es wurde inzwischen mit einem neu konstruierten Spektrometer von angenähert gleichen Dimensionen, und einem anderen Kochsalzkristall eine weitere Aufnahme mit einer Kupferantikathode gemacht. Bei einem Potential von 18,1 Kilovolts ergab sich für die Wellenlänge des Bandenkopfes $\lambda = 0{,}682$ Å.-E. Die Plancksche Konstante ergibt sich daraus zu: $h = 6{,}57 \cdot 10^{-27}$ erg. sec.

Genf, 11. Juli 1918. Laboratoire de Physique de l'Université.

(Eingegangen 14. Juli 1918.)

Über die „Ganzzahligkeit" der Atomgewichte und verwandte Fragen.

Von R. v. Mises.

Es ist eine in der modernen Physik wiederholt auftretende Fragestellung, ob man in den Beobachtungsergebnissen für eine bestimmte Gruppe von Größen (z. B. für die Atomgewichte der Elemente) eine nur durch gewisse „Fehlerstreuung" überdeckte Reihe von ganzzahligen Vielfachen einer Einheit zu erblicken hat. Die Frage ist wohl am frühesten für die Atomgewichte selbst gestellt worden, die ein auffallend „ganzzahliges" Verhalten aufweisen. So bemerkt z. B. J. Perrin[1]), daß unter den 24 ersten Elementen des periodischen Systems, d. h. unter den 24 kleinsten Atomgewichtszahlen (abgesehen vom Wasserstoff, der als Basis dient), sich nicht weniger als 20 finden, die um höchstens 0,1 von der nächsten ganzen Zahl abweichen. Wären die Atomgewichte, wie man sich in der Zahlentheorie ausdrückt, „modulo 1 gleichmäßig verteilt", so dürften nur 4 bis 5 jene Eigenschaft haben. Hier ist zweifellos eine starke Tendenz zur „Ganzzahligkeit" zu vermuten, aber ein sicheres, objektives Kriterium dafür besitzen wir nicht. In anderen Fällen, wie bei der Langevin-Weißschen Theorie der Magnetonen, für deren Zulässigkeit das Urteil über die „Ganzzahligkeit" einer bestimmten Zahlenreihe geradezu entscheidend zu sein scheint[2]), tritt das Bedürfnis nach einem objektiven, möglichst erschöpfenden Kriterium noch stärker auf, weil die Verhältnisse weniger prägnant sind.

Man hat bisher zur Behandlung dieses Problems lediglich Hilfsmittel herangezogen, die der bekannten Gaußschen Fehlertheorie entstammen, indem man die Abweichungen der Beobachtungswerte von den jeweils nächst benachbarten ganzen Zahlen als „Fehler" ansah, die einfachen und quadratischen Mittel dieser Fehler bildete usw. Daß aber alle diese Begriffe

1) Die Atome, deutsch von Lottermoser, Dresden 1914, S. 23.
2) Vgl. A. Heydweiller, Verh. d. D. phys. Ges. 13, 1063, 1911 und R. Gans, ebda., 14, 367, 1912.

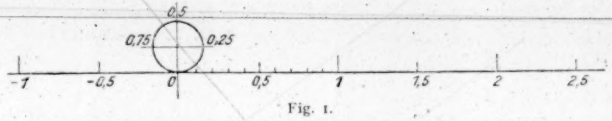


Fig. 1.

dem Problem der „Ganzzahligkeit" nicht adäquat sind, erkennt man schon daran, daß beispielsweise bei den drei Elementen, deren Atomgewicht als in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegend ermittelt wurde[1]), unklar bleibt, ob man $+0{,}5$ oder $-0{,}5$ als Fehler anzusehen hat. Man behält es dadurch noch in der Hand, das arithmetische Mittel der Fehler willkürlich mehr oder weniger der Null zu nähern. Aber auch wenn man sich auf die Betrachtung der Fehler q u a d r a t e beschränkt, bleibt man von dieser Unsicherheit nicht frei. Denn es ist von vornherein nicht selbverständlich, daß etwa beim Atomgewicht 35,46 (*Cl*) der Fehler $+0{,}46$ und nicht $-0{,}54$ beträgt: es könnte sehr wohl sein, daß man bei der zweiten Festsetzung bessere Übereinstimmung mit irgendwelchen Annahmen erzielt.

Im Folgenden werden die — im Grunde sehr einfachen — Elemente einer „z y k l i s c h e n F e h l e r t h e o r i e" entwickelt, die der G a u ß schen oder „linearen" zur Seite tritt, und eine völlig eindeutige Behandlung des Problems der „Ganzzahligkeit" sowie ähnlicher Fragen gestattet. Wir gelangen zu einem bestimmten Kriterium für die „Ganzzahligkeit", d. h. zu einem Ausdruck für die auf Grund der Beobachtungen ermittelte Wahrscheinlichkeit dafür, daß der „wahre" Wert der beobachteten Größen ganzzahlig ist. Um das Resultat zu verdeutlichen, erläutern wir es an dem Beispiel der Atomgewichte; eine Anwendung der Theorie auf eine moderne Frage der Elektrizitätstheorie wird demnächst von anderer Seite veröffentlicht werden.

1. P r o b l e m s t e l l u n g.

Wenn man reelle Zahlen, oder was dasselbe ist, Punkte der reellen Zahlenlinie, nur daraufhin betrachtet, wie sie zu den ganzen Zahlen oder zu den Punkten der natürlichen Zahlenreihe liegen, so erscheint es zweckentsprechend, die Zahlenlinie auf der Peripherie eines Kreises vom Umfang 1 aufzurollen (Fig. 1). Hierbei gelangen alle ganzzahligen Punkte der Zahlenlinie in den 0-Punkt des Kreises und alle jene Punkte der Zahlenlinie, die in bezug auf die beiden nächstbenachbarten ganzen Zahlen gleich liegen, fallen nach der Aufrollung zusammen. Analytisch drückt sich das so aus, daß jeder reellen Zahl x ein Punkt mit den C a r t e s i s c h e n Koordinaten

$$\frac{1}{2\pi}\cos 2\pi x \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x \qquad (1)$$

zugeordnet wird. Da aber die absolute Größe des Kreises weiterhin keine Rolle spielt, wollen wir, um kürzer zu schreiben, einen Kreis vom Radius 1, also vom Umfang 2π, benutzen und überdies ξ für $2\pi x$ setzen. Es wird dann der reellen Zahl x der Punkt mit den Koordinaten

$$\cos\xi \quad \text{und} \quad \sin\xi, \qquad (2)$$

oder, wie wir auch sagen können, die komplexe Größe

$$e^{2\pi x i} = e^{\xi i}$$

zugeordnet.

Irgendeine Reihe von n Zahlen wird stets durch n Punkte der Kreisperipherie dargestellt, wenn wir festsetzen, daß jeder Punkt so oft zu zählen ist, als er in der Reihe erscheint. Die Fig. 2 zeigt als Beispiel das Bild der

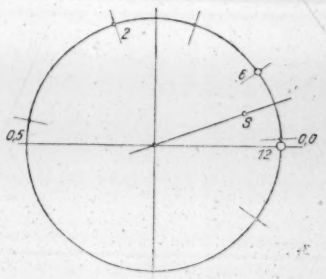


Fig. 2.

in Tabelle I[1]) angegebenen Konstanten, nämlich der spezifischen Gewichte von 21 Metallen. Die Vielfachheit der nicht einfachen Punkte ist jedesmal dem Punkte beigeschrieben, überdies entspricht auch die Größe der die Punkte markierenden kleinen Kreise annähernd der Vielfachheit. In Fig. 3 sind in gleicher Weise die

1) *Dy* 162,5, *Nb* 93,5 und *Ge* 72,5 nach L a n d o l t - B ö r n s t e i n, 1912.

1) Entnommen der Tafel VIb des Logarithmenbuches von G r e v e, 1897.

Tabelle I.

Spez. Gewicht von 21 Metallen.

Bezeichnung	spez. Gewicht
Aluminium	2,5
Antimon	6,71
Blei	11,35
Eisen	7,79
Gold	19,32
Iridium	18,00
Kalium	0,86
Kanonengut	8,83
Kobalt	8,51
Kupfer	8,88
Lithium	0,56
Messing	8,39
Natrium	0,97
Nickel	8,28
Platin	21,53
Silber	10,51
Stahl	7,82
Tellur	6,11
Wismut	9,82
Zink	7,19
Zinn	7,29

Tabelle II.

Atomgewicht der 24 leichtesten Elemente.

Bezeichnung	Atomgew. bez. a. H.
He	4,0
Li	7,00
Be	9,1
B	11,0
C	12,00
N	14,01
O	16,00
F	19,0
Ne	20,0
Na	23,00
Mg	24,3
Al	27,1
Si	28,3
P	31,0
S	32,0
Cl	35,47
A	39,9
K	39,1
Ca	40,1
Sc	44
Ti	48,1
V	51,2
Cr	52,1
Mn	55,0

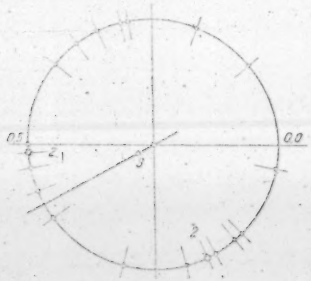


Fig. 3.

in Tabelle II zusammengestellten, auf H bezogenen Atomgewichte der ersten 24 Elemente des periodischen Systems dargestellt[1]). Man sieht, daß während die Punkte in Fig. 2 einigermaßen gleichförmig über den Umfang zerstreut sind, sie sich in Fig. 3 auffallend beim o-Punkt häufen.

Wenn in einem bestimmten Falle die eingangs dieser Arbeit ausgesprochene Vermutung auftritt, so wird sie sich unserer geometrischen Darstellung gegenüber zunächst in der Frage äußern, ob die den Beobachtungsergebnissen entsprechenden Kreispunkte in ihrer Anordnung den Charakter einer durch zufällige Beobachtungsfehler entstandenen Streuung um einen festen Punkt herum aufweisen. Dabei braucht der physische Grund der Streuung keineswegs in Beobachtungsfehlern im gewöhnlichen Sinne zu bestehen. Er kann beispielsweise, wie bei den Atomgewichten, darin liegen, — oder gesucht werden — daß die empirisch gegebenen chemischen Elemente durch das zufällige Auftreten einzelner negativ geladener Elektronen in der Atomstruktur gegenüber gewissen „idealen" Elementen abweichen. Auf diese physikalischen Fragen brauchen wir aber in keiner Weise einzugehen, da es sich für uns nur darum handelt, ob das vorliegende Zahlenmaterial zu einer derartigen Theorie überhaupt Anlaß gibt. Um das entscheiden zu können, müssen wir, kurz gesagt, die Fehlertheorie für die Beobachtung der Lage eines Punktes auf einer Kreislinie entwickeln. Die Frage ist: Welchem Fehlergesetz genügen Beobachtungen auf einer Kreislinie und wie läßt sich die Wahrscheinlichkeit der Annahme, daß der unbekannte Punkt seine „wahre" Lage an einer bestimmten Stelle hat, berechnen?

Es könnte vielleicht zweifelhaft scheinen, ob es hier überhaupt einer neuen Theorie bedarf und ob die klassische Fehlertheorie von Gauß nicht ohne weiteres anwendbar ist. Hierzu mag Folgendes bemerkt werden.

Die Gaußsche Fehlertheorie behandelt, wie bekannt, das Gesetz der Fehler, die bei der Bestimmung eines reellen Zahlenwertes schlechthin, also eines Punktes auf der Zahlenlinie entstehen. Als die wahrscheinlichste Lage des gesuchten Punktes erscheint stets der Schwerpunkt der Beobachtungsergebnisse, der durch das arithmetische Mittel der beobachteten Zahlenwerte bestimmt wird. In unserm Falle können wir das arithmetische Mittel der Bogenlängen ξ überhaupt nicht eindeutig bilden, weil jedes einzelne ξ nur bis auf ganze Vielfache von 2π bestimmt ist. Den Schwerpunkt der den Beobachtungsergebnissen zugeordneten Punkte können wir wohl aufsuchen, er liegt aber im allgemeinen nicht auf der Kreislinie, sondern in ihrem Innern, entspricht also gar keinem Werte der gesuchten Größe: Es ist somit unerläßlich, für unsern Fall eine neue Theorie aufzustellen.

2. Ableitung des zyklischen Fehlergesetzes.

Wir nehmen zunächst an, wie es auch in der Gaußschen Theorie üblich ist, daß der Fehler ζ einer Beobachtung ξ nur gewisser

1) Nach den Angaben von Perrin, a. a. O., S. 23.

diskreter Werte fähig sei. Wenn beispielsweise alle Messungen auf zwei Dezimalstellen genau sind, so kommen für ζ nur die ganzen Vielfachen von $\frac{2\pi}{100}$ in Betracht. Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von der Größe ζ zu machen, sei durch die Funktion $\psi(\zeta)$ dargestellt, die wir als stetig und differenzierbar voraussetzen. Die Summe der $\psi(\zeta)$, über die möglichen Werte von ζ erstreckt, muß 1 sein. Bezeichnet α den wahren Wert der gesuchten Größe, so wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die erste Beobachtung den Wert ξ_1, die zweite den Wert ξ_2 .... die $n$te den Wert ξ_n ergibt, gleich

$$\psi(\xi_1 - \alpha) \cdot \psi(\xi_2 - \alpha) \ldots\ldots \psi(\xi_n - \alpha). \quad (3)$$

In Worten heißt das: Wenn man eine unendliche Folge von Versuchsserien, die jede aus n Einzelversuchen besteht, verfolgt, so wird das Beobachtungsergebnis $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_n$ mit der relativen Häufigkeit (3) auftreten. Dabei handelt es sich immer um die Beobachtung derselben Größe α.

Erweitern wir nun unsere Betrachtung, indem wir auch solche n-fache Versuchsserien einbeziehen, die zur Beobachtung einer andern Größe α angestellt wurden! Die relative Häufigkeit der Versuche für ein bestimmtes α sei durch $f(\alpha)$ gegeben. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Versuchsserie sowohl die Ergebnisse $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_n$ liefert als auch einem bestimmten α entspricht, proportional dem Ausdruck

$$\psi(\xi_1 - \alpha) \cdot \psi(\xi_2 - \alpha) \ldots\ldots \psi(\xi_n - \alpha) \cdot f(\alpha). \quad (4)$$

Dabei ist wieder vorausgesetzt, daß auch α nur gewisse diskrete Werte annehmen kann; die Summe der $f(\alpha)$, über alle diese Werte des Argumentes erstreckt, muß 1 sein. Setzt man in (4) die $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ konstant, so stellt (4) als Funktion von α, bis auf einen konstanten Faktor, die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß der wahre Wert einer Größe, für welche die Beobachtungen $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ gemacht wurden, α beträgt.

In der üblichen Fehlertheorie sind $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ und α durch Punkte der reellen Zahlenlinie darstellbar. Bekanntlich hat Gauß die Fehlerfunktion aus der Forderung bestimmt, daß (4) bei $f =$ konst., für beliebige feste $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ als Funktion von α betrachtet, für jenes α ein Maximum wird, welches dem Schwerpunkt der den $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ zugeordneten Punkte entspricht. In unserm Falle sind die ξ und α Bogenlängen, die auf dem Kreisumfang von einem Nullpunkt aus aufgetragen werden, derart, daß jedem Wert ein bestimmter Punkt der Kreislinie entspricht. Wir stellen nun im Sinne der in Abschnitt 1 erörterten Notwendigkeit einer neuen Hypothese folgende Forderung an die „zyklische Fehlerfunktion" ψ:

Der Ausdruck (4) soll bei $f =$ konst., für beliebige feste $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ sein Maximum für jene Werte von α erreichen, deren zugeordneter Peripheriepunkt dem Schwerpunkt der den $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ entsprechenden Punkte zunächst liegt.

Diese Festsetzung ist eindeutig, wofern der Schwerpunkt nicht gerade in den Kreismittelpunkt fällt; auf diesen Grenzfall kommen wir noch zurück. Im allgemeinen Fall ist der Punkt α jener Kreispunkt, der mit dem Schwerpunkt auf demselben Kreisradius liegt.

Die Ermittlung von ψ ist nun sehr einfach. Soll (4) ein Extremum werden, so gilt das auch für den log des Ausdrucks. Dabei kann man den konstanten Faktor f weglassen. Man erhält so

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \log \psi(\xi_\varkappa - \alpha) = \text{extr.}, \quad \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\psi'(\xi_\varkappa - \alpha)}{\psi(\xi_\varkappa - \alpha)} = 0. \quad (5)$$

Andrerseits gilt, wenn a, α die Polarkoordinaten des Schwerpunkts der Punkte $(\cos\xi_\varkappa, \sin\xi_\varkappa)$ sind:

$$\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} \cos(\xi_\varkappa - \alpha = a), \quad \sum_{\varkappa=1}^{n} \sin(\xi_\varkappa - \alpha) = 0. \quad (6)$$

Damit die zweite Gleichung (5) und die zweite Gleichung (6) bei ganz beliebigen $\xi_1 \ldots\ldots \xi_n$ nebeneinander bestehen, müssen die einzelnen Summanden einander proportional sein, also:

$$\frac{\psi'(\zeta)}{\psi(\zeta)} = k \cdot \sin\zeta, \quad (7)$$

und integriert:

$$\psi(\zeta) = Ce^{k\cos\zeta}. \quad (8)$$

Hierin muß $k > 0$ gewählt werden, damit $\psi''(0) < 0$ wird, wie es die Bedingung des Maximums fordert.

Diese Gleichung (8) tritt in unserm Falle an die Stelle der Gaußschen Fehlerfunktion

$$\varphi(z) = Ce^{-h^2 z^2}. \quad (9)$$

Man sieht, daß wenn die ζ klein gegen den Kreisradius sind, der gleich 1 gewählt wurde, Gl. (8) in Gl. (9) übergeht.

Die Konstante C ist aus der oben erwähnten Bedingung zu bestimmen, daß die Summe der ψ für alle ζ-Werte, die überhaupt möglich sind, gleich 1 wird. So entspricht beispielsweise der Annahme, daß

$$\zeta = \frac{2\pi}{100}, 2\cdot\frac{2\pi}{100}, \ldots\ldots 2\pi$$

werden kann, ein ganz bestimmtes C für jedes k. Je enger die möglichen ζ-Werte liegen;

um so kleiner wird natürlich C. In der Regel betrachtet man nur den Grenzfall, in dem ξ stetig alle Werte zwischen null und 2π durchläuft, wobei man dem $\psi(\xi)$ eine etwas veränderte Bedeutung beilegen muß, da sonst C einfach null würde. Es soll jetzt $\psi(\xi)\,d\xi$ die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnen, daß der Fehler in den Grenzen $\xi, \xi + d\xi$ liegt. Dann lautet die Bedingung für C:

$$C\int_0^{2\pi} e^{k\cos x}\,dx = 1. \qquad (10)$$

Das hier auftretende bestimmte Integral führt, wie bekannt, auf die Besselsche Funktion nullter Ordnung des komplexen Argumentes ki[1]):

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos x}\,dx = 2\pi J_0(ki). \qquad (11)$$

Schreiben wir, da C von k abhängt, $C(k)$ an Stelle von C, so haben wir endgültig die „Zyklische Fehlerfunktion"

$$\psi(\xi) = C(k)e^{k\cos\xi} \text{ mit } C(k) = \frac{1}{2\pi J_0(ki)}. \qquad (12)$$

Die untenstehende Tabelle III gibt die Werte von $C(k)$ für $k = 0$ bis 6 nach Jahnke-Emde,

Tabelle III.

Präzisionsmaß, Fehlerkonstante und Schwerpunktsabstand.

Präzisionsmaß k	Fehlerkonstante C	Schwerpunktsabstand a	Produkt ka
0	0,15915	0,0000	0,0000
1	0,12571	0,4464	0,4464
2	0,06982	0,6978	1,3955
3	0,03261	0,8100	2,4299
4	0,01408	0,8635	3,4540
5	0,005843	0,8934	4,4668
6	0,002367	0,9123	5,4740

Funktionentafeln, S. 159. Für große k kann annähernd gesetzt werden[2]):

$$C(k) \sim e^{-k}\sqrt{\frac{k}{2\pi}},$$

also:

$$\psi(\xi) \sim \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,e^{k(\cos\xi - 1)}. \qquad (13)$$

In Fig. 4 ist der Verlauf von $C(k)$ graphisch dargestellt.

1) Vgl. etwa Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1909, S. 169.

2) Jahnke-Emde, ebda., S. 100.

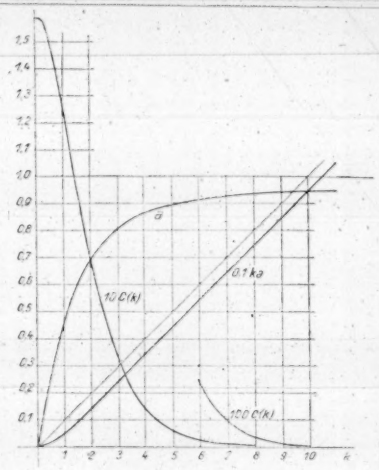


Fig. 4.

3. Präzisionsmaß, Streuung, Schwerpunkt.

Die Konstante k in (8) oder (12), von der wir schon wissen, daß sie positiv sein muß, hat die Bedeutung eines Präzisionsmaßes der Beobachtungen. Denn je größer k, desto stärker häufen sich die Fehler in der Nähe von $\xi = 0$, wie man am besten in Fig. 5 erkennt.

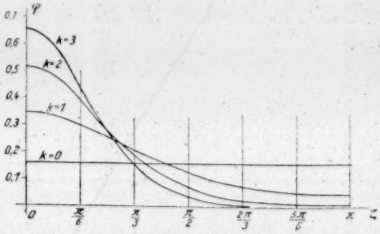


Fig. 5.

Hier sind die Fehlerkurven für $k = 1, 2$ und 3 eingezeichnet. Für $k = 0$ erhält man naturgemäß eine Parallele zur Abszissenachse im Abstand $\frac{1}{2\pi} = 0{,}15915$.

Das Präzisionsmaß steht in engem Zusammenhang mit der Lage des Schwerpunktes der durch $\psi(\xi)$ bestimmten Verteilung. Aus Symmetriegründen ist natürlich das Winkel-

argument α des Schwerpunktes dieser Verteilung null. Der Abstand a des Schwerpunktes vom Kreismittelpunkt ist, analog der ersten Gleichung (6) durch

$$a = \int_0^{2\pi} \psi(x) \cdot \cos x \, dx = C(k) \int_0^{2\pi} \cos x \cdot e^{k \cos x} dx \qquad (14)$$

gegeben. Das rechts stehende bestimmte Integral ist leicht auf das oben behandelte (11) zurückzuführen:

$$\int_0^{2\pi} \cos x \cdot e^{k \cos x} dx = \frac{d}{dk} \int_0^{2\pi} e^{k \cos x} dx = \\ = 2\pi \frac{dJ_0(ki)}{dk}. \qquad (15)$$

Nach einer bekannten Formel über Besselsche Funktionen ist $J_0' = -J_1$, so daß mit Rücksicht auf den Wert von $C(k)$:

$$a = -\frac{iJ_1(ki)}{J_0(ki)}. \qquad (16)$$

wird. Für größere k folgt aus der asymptotischen Darstellung der Besselschen Funktionen, etwa für $k > 6$ hinreichend genau:

$$a \sim 1 - \frac{1}{2k} - \frac{11}{64k^2} \qquad (16')$$

und daraus

$$k \sim \frac{1}{2(1-a)} + \frac{11}{32}. \qquad (16'')$$

In Fig. 4 ist a als Funktion von k eingezeichnet und überdies auch das — später zur Verwendung kommende — Produkt ka. Zahlenwerte für $k = 0$ bis 6 gibt die obenstehende Tabelle III. Für große k nähert sich a dem Wert 1, für $k = 0$ ist $a = 0$. Man sieht, wie in diesem letzten Falle die oben erwähnte Unbestimmtheit zutage tritt. Der Schwerpunkt fällt in den Kreismittelpunkt und ψ wird konstant, erfüllt also an allen Stellen die analytische Bedingung des Maximums, $\psi' = 0$. Damit erledigt sich der erwähnte Ausartungsfall unserer Definition von Abschnitt 2.

In der Gaußschen Fehlertheorie besteht, wie bekannt, ein enger Zusammenhang zwischen dem Präzisionsmaß und der sog. Streuung oder dem Fehlerquadrat. Je größer das Präzisionsmaß, desto kleiner die Streuung und umgekehrt. In unserm Falle spielt, wie wir eben gesehen haben, der Abstand des Schwerpunktes der Beobachtungen von der Kreisperipherie eine ähnliche Rolle, wie die Streuung beim linearen Fehler. Man kann geradezu die Größe $1 - a$ als ein Maß der Streuung bezeichnen; nur wenn alle Beobachtungen in einem Punkt des Kreises konzentriert sind, wird $1 - a = 0$. Auch aus der Gleichung:

$$1 - a = \int_0^{2\pi} (1 - \cos x) \psi(x) dx, \qquad (17)$$

die unmittelbar aus (14) folgt, ersieht man, daß für kleine x (im Verhältnis zum Kreisradius) wegen $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ der Ausdruck (17) bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ in das Fehlerquadrat übergeht. Schließlich ist für hinreichend große k nach (16') $1 - a$ der reziproke Wert von $2k$, wie in der Gaußschen Theorie Streuung und doppeltes Präzisionsmaß reziprok sind. Im Gegensatz zur linearen Fehlertheorie läßt also hier der Begriff der Streuung eine geometrisch anschauliche Deutung zu.

Ist eine beliebige, stetige oder diskrete, Verteilung von Punkten auf dem Kreise gegeben, so kann man immer ihren Schwerpunkt mit den Polarkoordinaten a, α nach bekannten Regeln bestimmen. Durch α wird dann der wahrscheinlichste Wert der gesuchten Größe festgelegt, durch $1 - a$ die Streuung, aus der man nach Gl. (16) das Präzisionsmaß des zugehörigen Fehlergesetzes rechnen kann. Es knüpfen sich hieran noch weitere Beziehungen, die die Darstellung willkürlicher Verteilungsfunktionen betreffen, auf die aber an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden soll.

4. Kriterium der Ganzzahligkeit.

Es sei eine Reihe willkürlicher Punkte auf dem Kreisumfang durch die Bogenlängen $\xi_1, \xi_2 \ldots \ldots \xi_n$ gegeben. Die Cartesischen Koordinaten x, y des Schwerpunktes sind durch

$$x = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} \cos \xi_\varkappa, \qquad y = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} \sin \xi_\varkappa, \qquad (18)$$

die Polarkoordinaten a, α durch

$$a = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{a}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{a} \qquad (19)$$

bestimmt. Zu dem gefundenen Werte von a kann man das nach Gl. (16) zugeordnete Präzisionsmaß k aufsuchen, praktisch am einfachsten, indem man Fig. 4 benutzt oder in der oben wiedergegebenen Zahlentafel III interpoliert.

Die Frage, die wir zunächst beantworten wollen, ist die nach der Wahrscheinlichkeit irgendeiner Lage ξ des wahren Wertes der Beobachtungen. Nach Gl. (4) ist diese Wahrscheinlichkeit proportional

$$\psi(\xi_1 - \xi) \cdot \psi(\xi_2 - \xi) \ldots \ldots \psi(\xi_n - \xi) \cdot f(\xi).$$

Da wir $f(\xi) = \text{konst.}$ setzen, d. h. die „a priori"-Wahrscheinlichkeit jeder Lage als gleich annehmen, wird daraus nach Einführung von (12):

$$\text{konst.}\, e^{k\sum_{\varkappa=1}^{n}\cos(\xi_\varkappa-\xi)}. \qquad (20)$$

Hier wäre es freilich von vornherein noch unbestimmt, welcher Wert in einem gegebenen Falle für k zu setzen ist. Wir folgen aber dem bereits am Schlusse von Abschnitt 3 erwähnten, in der Gaußschen Fehlertheorie üblichen Vorgang, indem wir das Präzisionsmaß k gleich jenem Wert wählen, der sich aus der tatsächlichen Streuung der Beobachtungen, also in unserm Fall aus der Schwerpunktsentfernung a, nach (16) bzw. (16′) rechnet.

Wenn wir, wie schon oben in Abschnitt 2 geschehen ist, zu stetig verteilten ξ-Werten übergehen, ist in (20) ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte an der Stelle ξ zu erblicken, d. h. der Ausdruck gibt, mit $d\xi$ multipliziert, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die gesuchte Größe in das Intervall $\xi, \xi + d\xi$ fällt.

Mit Berücksichtigung von (18) und (19) erhält man:

$$\sum\cos(\xi_\varkappa-\xi)=\cos\xi\cdot\sum\cos\xi_\varkappa+ \qquad (21)$$
$$\sin\xi\cdot\sum\sin\xi_k=n(x\cos\xi+y\sin\xi)=na\cos(\xi-\alpha).$$

Demnach wird aus (20):

$$\text{konst.}\, e^{kna\cos(\xi-\alpha)}, \qquad (22)$$

und da zur Bestimmung der Konstanten die Bedingung heranzuziehen ist, daß das über den ganzen Kreisumfang erstreckte Integral von (22) gleich 1 wird, so ist die Konstante nichts anderes als $C(kna)$ im Sinne der Definition in Gl. (12). Wir haben somit das Ergebnis: Der Ausdruck

$$C(kna)\, e^{kna\cos(\xi-\alpha)}\, d\xi \qquad (23)$$

stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß der wahre Wert der Bogenlänge, für welche die Beobachtungsergebnisse $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ vorliegen, zwischen ξ und $\xi + d\xi$ liegt.

Es bedarf nun nur noch der einfachen Spezialisierung für $\xi = 0$, um das Kriterium der „Ganzzahligkeit" zu erhalten. Bedenkt man, daß bei Gleichverteilung der Punkte über den Kreisumfang die Dichte an jeder Stelle $\frac{1}{2\pi}$ ist, so sieht man, daß der Ausdruck K

$$K = 2\pi\, C(kna)\, e^{kna\cos\alpha} \qquad (24)$$

ein Kriterium dafür bildet, in welchem Maße die Annahme, der „wahre" Wert der Beobachtungsgröße sei ganzzahlig, berechtigt ist. Ist der Ausdruck wesentlich größer als 1, so hat die Annahme viel für sich, ist er kleiner als 1, so ist sie zu verwerfen. Hat der Ausdruck gerade den Wert 1, so besagt das, daß die Annahme durchschnittlich gleichberechtigt ist jeder andern Annahme über die Lage des gesuchten Punktes auf dem Kreise.

Wenn n oder wenigstens nk eine große Zahl ist, so geht (24) über in

$$K \sim \sqrt{2\pi kna}\, e^{kna(\cos\alpha-1)}. \qquad (25)$$

In (24) und (25) bedeuten, um es nochmals zusammenzufassen: a, α die Polarkoordinaten des Schwerpunktes der Beobachtungen, k das aus a nach (16) gerechnete Präzisionsmaß, n die Anzahl der Beobachtungen.

Der Ausdruck (24) oder (25) wächst, wie es sein muß, bei festem n und a mit abnehmendem α. Sind a und α, also die Schwerpunktskoordinaten fest, so nimmt K — falls überhaupt α von Null verschieden ist — mit wachsendem n stark ab. Dies rührt daher, daß bei einer sehr großen Zahl von Versuchen schließlich kein anderer Wert als der durch α bestimmte „wahrscheinlichste" irgendeine Wahrscheinlichkeit besitzt. Es wird daher unter Umständen einen besseren Einblick in das Verhalten hinsichtlich der „Ganzzahligkeit" gewähren, statt des Ausdruckes K den verhältnismäßigen Wert des Fehlerintegrales für einen kleinen, den Nullpunkt einschließenden Bereich:

$$K' = \frac{\pi}{\xi_0}\, C(kna) \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{kna\cos(\xi-\alpha)}\, d\xi \qquad (26)$$

zu betrachten. Bezeichnet man mit $\Psi(x)$ das doppelt genommene Integral von ψ, mit den Grenzen 0 und x (vgl. den am Schlusse der Arbeit beigefügten Zusatz), so ist

$$K' = \frac{\pi}{2\xi_0}\left[\Psi(\xi_0-\alpha, kna) - \Psi(-\xi_0-\alpha, kna)\right]. \qquad (27)$$

Für große kna kann (vgl. den Zusatz) statt Ψ das Gaußsche Fehlerintegral Φ gesetzt werden:

$$K' \sim \frac{\pi}{2\xi_0}\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{kna}{2}}\,(\xi_0-\alpha)\right) - \right. \qquad (28)$$
$$\left. - \Phi\left(\sqrt{\frac{kna}{2}}\,(-\xi_0-\alpha)\right)\right].$$

Schließlich können auch noch die Extremwerte von (23) in ihrem Verhältnis zu $\frac{1}{2\pi}$ zur Beurteilung der „Ganzzahligkeit" mit herangezogen werden. Je näher die beiden Verhältniszahlen zu 1 liegen, umso größer ist die „Gleichverteilung" der Beobachtungen. Man kann als Maß der „Gleichverteilung" die beiden Zahlen

$$2\pi C(kna)\, e^{\pm kna} \qquad (29)$$

oder bei großem kna:

$$\sqrt{2\pi kna} \text{ und } \sqrt{2\pi kna}\, e^{-2kna} \qquad (30)$$

ansehen. Die im folgenden dargelegten Anwendungen werden das noch näher beleuchten.

5. Anwendungen.

Wir wollen zunächst, um einen Anhaltspunkt zu gewinnen, die beiden oben in Tabelle I und II zusammengestellten Zahlenreihen auf ihre „Ganzzahligkeit" und „Gleichverteilung" untersuchen. Für die spezifischen Gewichte der 21 Metalle ergibt sich die folgende Tabelle IV,

Tabelle IV.

Ganzzahligkeits-Elemente der spez. Gewichte nach Tabelle I.

$x_\varkappa$	n	$\xi_\varkappa$	$n\cos\xi_\varkappa$ pos.	$n\cos\xi_\varkappa$ neg.	$n\sin\xi_\varkappa$ pos.	$n\sin\xi_\varkappa$ neg.
0,11	1	39° 36′	0,770513	—	0,637424	—
0,19	1	68° 24′	0,368125	—	0,929777	—
0,28	1	100° 48′	—	0,187381	0,982287	—
0,29	1	104° 24′	—	0,248690	0,968583	—
0,32	1	115° 12′	—	0,425779	0,904827	—
0,35	1	126°	—	0,587785	0,809017	—
0,39	1	140° 24′	—	0,770513	0,637424	—
0,50	1	180°	—	1,00000	—	—
0,51	2	183° 36′	—	1,996054	—	0,125582
0,53	1	190° 48′	—	0,982287	—	0,187381
0,56	1	201° 36′	—	0,929777	—	0,368125
0,60	1	216°	—	0,809017	—	0,587785
0,71	1	255° 36′	—	0,248690	—	0,968583
0,79	1	284° 24′	0,248690	—	—	0,968583
0,82	2	295° 12′	0,851558	—	—	1,809654
0,83	1	298° 48′	0,481754	—	—	0,876307
0,86	1	309° 36′	0,637424	—	—	0,770513
0,88	1	316° 48′	0,728969	—	—	0,684547
0,97	1	349° 12′	0,982287	—	—	0,187381
	21		5,06932	8,18597	5,86934	7,53444
				5,06932		5,86934
				−3,1166		−1,6651

in der die erste Spalte die Größe $x^\varkappa$ (und zwar der Einfachheit halber nach Fortlassung der in ihr enthaltenen größten ganzen Zahl), die zweite die Vielfachheit ihres Vorkommens, die dritte den zugehörigen Winkel $\xi_\varkappa$, endlich die vierte und fünfte die mit der Vielfachheit multiplizierten Koordinaten $\cos\xi_\varkappa$ und $\sin\xi_\varkappa$ angibt. Aus den algebraischen Summen der letzteren findet man die Schwerpunktskoordinaten:

$$x = -\frac{3,1166}{21} = -0,1484,$$

$$y = -\frac{1,6651}{21} = -0,0793.$$

Daraus weiter:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} = 0,1684$$

und

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 108^\circ 10'.$$

Das zu $a = 0,168$ gehörige Präzisionsmaß entnimmt man durch Interpolation der Tabelle III oder der Fig. 4, oder besser, — mit Rücksicht auf die Kleinheit von k — indem man die Reihenentwicklung für J_0 und J_1 auf Gl. (16) anwendet:

$$a \sim \frac{k}{2}\,\frac{1+\frac{k^2}{8}}{1+\frac{k^2}{4}} \sim \frac{k}{2}\left(1-\frac{k^2}{8}\right), \quad k \sim 2a\left(1+\frac{a}{2}\right),$$

demnach $k = 0,36$. Um das Kriterium K zu erhalten, rechnen wir $kna = 0,36 \cdot 21 \cdot 0,1684 = 1,275$, entnehmen der Fig. 4 das zugehörige $C(1,275) = 0,11$ und erhalten mit $\cos\alpha = 0,882$

$$K = 2\pi \cdot 0,11 \cdot e^{-1,125} = 0,228.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Ganzzahligkeit liegt also hier weit unter dem Durchschnittswert. Das Maß der Gleichverteilung liefert nach (29) die beiden Zahlen

$$2\pi \cdot 0,11 \cdot e^{\pm 1,275},$$

d. i. 2,46 und 0,19. Gegenüber dem, was wir am Beispiel der Atomzahlen sofort sehen werden, muß dies als eine verhältnismäßig starke Gleichförmigkeit bezeichnet werden.

Für die 24 kleinsten Atomgewichte nach Tabelle II zeigt die untenstehende Tabelle V die analoge Zusammenstellung wie Tabelle IV. Hier ergeben sich für den Schwerpunkt:

$$x = \frac{17,3698}{24} = 0,724, \quad y = \frac{6,0423}{24} = 0,252$$

und daraus die Polarkoordinaten:

$$a = 0,765, \quad \alpha = 19^\circ 9'.$$

Tabelle V.

Ganzzahligkeits-Elemente der Atomgewichte nach Tabelle II.

$x_\varkappa$	n	$\xi_\varkappa$	$n\cos\xi_\varkappa$ pos.	$n\cos\xi_\varkappa$ neg.	$n\sin\xi_\varkappa$ pos.	$n\sin\xi_\varkappa$ neg.
0,00	12	0°	12,000000	—	—	—
0,01	1	3° 36′	0,998027	—	0,062791	—
0,10	6	36°	4,854102	—	3,526710	—
0,20	1	72°	0,309017	—	0,951057	—
0,30	2	108°	—	0,618034	1,902114	—
0,47	1	169° 12′	—	0,982287	0,187381	—
0,90	1	324°	0,809017	—	—	0,587785
	24		18,970163	1,600321	6,630053	0,587785
			1,600321		0,587785	
			+17,36984		+6,04227	

Tabelle VI.

Ganzzahligkeits-Elemente der vollständigen Atomgewichtstafeln von 1911.

$x_\varkappa$	Bezeichnung	n	$\xi_\varkappa$	$n \cos \xi_\varkappa$ pos.	$n \cos \xi_\varkappa$ neg.	$n \sin \xi_\varkappa$ pos.	$n \sin \xi_\varkappa$ neg.
0,00	*B, Bi, C, Cr, F, La, Mo, Na*	8	0^0	8,000000	—	0,000000	—
0,008	*H*	1	$2^0\,52'\,48''$	0,998737	—	0,050242	—
0,01	*N*	1	$3^0\,36'$	0,998027	—	—	—
0,04	*P*	1	$14^0\,24'$	—	—	0,248690	—
0,06	*V*	1	$21^0\,36'$	0,929777	—	—	—
0,07	*S*	1	$25^0\,12'$	—	—	—	—
0,09	*Ca*	1	$32^0\,24'$	0,844328	—	0,535827	—
0,10	*Al, Be, K, Pb, Ti* . .	5	36^0	3,236068	—	2,938925	—
0,20	*Au, Ne, Pt, Se* . . .	4	72^0	0,309017	—	3,804228	—
0,25	*Ce*	1	90^0	—	—	1,000000	—
0,30	*Si*	1	108^0	—	—	0,951057	—
0,32	*Mg*	1	$115^0\,12'$	—	0,425779	—	—
0,37	*Ba, Zn*	2	$133^0\,12'$	—	1,369094	1,457038	—
0,40	*Cd*	1	144^0	—	—	0,587785	—
0,45	*Rb*	1	162^0	—	0,951057	0,309017	—
0,46	*Cl*	1	$165^0\,36'$	—	—	—	—
0,57	*Cu*	1	$205^0\,12'$	—	—	—	—
0,63	*Sr*	1	$226^0\,48'$	—	0,684547	—	0,728969
0,68	*Ni*	1	$244^0\,48'$	—	0,425779	—	—
0,70	*Pd, Ru*	2	252^0	—	—	—	1,902114
0,81	*Cs*	1	$291^0\,36'$	0,368125	—	—	0,929777
0,85	*Fe*	1	306^0	0,587785	—	—	0,809017
0,88	*Ag, Ar*	2	$316^0\,48'$	1,457038	—	—	1,369094
0,90	*Kr, Rh*	2	324^0	1,618034	—	—	1,175570
0,92	*Br, Y*	2	$331^0\,12'$	1,752614	—	—	0,961508
0,93	*Mn*	1	$334^0\,48'$	0,904827	—	—	0,425779
0,94	*Li*	1	$378^0\,24'$	0,929777	—	—	—
0,96	*As*	1	$345^0\,36'$	0,968583	—	—	—
0,97	*Co*	1	$349^0\,12'$	0,982287	—	—	0,187381
0,99	*He*	1	$356^0\,24'$	0,998027	—	—	—
		49		25,88395	3,85626	11,88371	8,49121
				3,85626		8,49121	
				+22,0277		+ 3,3925	

Das Präzisionsmaß k ist zufolge Fig. 4 etwa gleich 2,56, das Produkt $k\,a = 1{,}96$, daher $k\,n\,a = 47{,}04$. Dieser Wert ist groß genug, um die Anwendung der asymptotischen Formel (25) zu rechtfertigen. Wir erhalten somit

$$K = \sqrt{2\pi \cdot 47{,}04} \cdot e^{-47{,}04 \cdot 0{,}0536} = \frac{17{,}19}{13{,}46} = 1{,}28.$$

Es fällt also das Kriterium K hier größer als 1 aus, aber viel unbedeutender, als man wohl nach dem Aussehen der Zahlenreihe und der Fig. 2 vermuten würde. Die Erklärung finden wir, indem wir die beiden Extrema der Wahrscheinlichkeitsdichte nach (30) berechnen: Sie betragen hier 17,2 und $17{,}2\,e^{-94}$. Man sieht, daß eine außerordentlich starke Abweichung von der Gleichverteilung vorliegt, und daß der verhältnismäßig kleine Wert von K nur daher rührt, daß der wahrscheinlichste Punkt immerhin schon 19^0 vom Nullpunkt entfernt liegt. Fragen wir daher nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der „wahre" Wert etwa zwischen $\pm 0{,}06$ gelegen ist, so erhalten wir nach (28) mit $\xi^0 = 2\pi \cdot 0{,}06 = 0{,}3769$.

$$K' = \frac{1}{0{,}24}\Big[\Phi(4{,}85 \cdot 0{,}0427) - \Phi(-4{,}85 \cdot 0{,}7111)\Big] =$$

$$= \frac{1}{0{,}12} \cdot \frac{1}{2}\Big[0{,}230 + 1{,}000\Big] = 8{,}33 \cdot 0{,}615 = 5{,}12,$$

d. h. mit rund 61 Proz. Wahrscheinlichkeit ist anzunehmen, daß die Abweichung einer Atomgewichtszahl von der nächsten ganzen Zahl höchstens gleich 0,06 ist. Da aber auf den Bereich $\pm 0{,}06$ im Durchschnitt nur rund 12 Proz. Wahrscheinlichkeit entfallen sollte, so wird der Durchschnittswert hier um das Fünffache übertroffen.

Um endlich die Frage der Atomgewichtszahlen noch etwas genauer zu verfolgen, haben wir aus der vollständigen Zusammenstellung der Atomgewichte von 1911 [1]) jene ausgewählt, deren Fehlergrenze mit nicht mehr als $\pm 0{,}1$ angegeben erscheint. Es bleiben so im ganzen 49 Zahlen (von insgesamt 81), deren „Ganzzah-

1) Landolt-Börnstein, 1912.

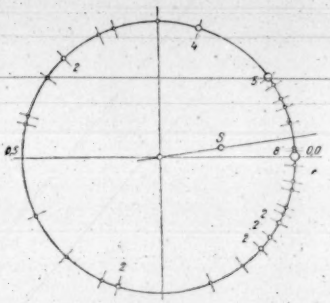


Fig. 6.

ligkeitselemente" auf Grund der nebenstehenden Tabelle VI (s. auch Fig. 6) berechnet wurden [1]). Es sind die Schwerpunkts-Koordinaten:

$$x = \frac{22{,}0277}{49} = 0{,}4495\,, \quad y = \frac{3{,}3925}{49} = 0{,}0692,$$

$$a = 0{,}4548, \quad \cos\alpha = 0{,}9883, \quad \alpha = 8^0\,45'.$$

Das Produkt ka findet man durch Interpolation aus Tabelle III zu 0,4798, daher $k = 1{,}055$ und $kna = 23{,}510$. Man ersieht schon aus den Schwerpunkts-Koordinaten, daß die Präzision geringer ist als im früheren Beispiel, daß aber der wahrscheinlichste Wert viel näher an den Nullpunkt gerückt ist. Die „Gleichverteilung" ist jetzt größer (kleineres kna), aber auch das Maß der „Ganzzahligkeit" ist — infolge der Annäherung des Schwerpunkts — gewachsen:

$$K = \sqrt{2\pi \cdot 23{,}51} \cdot e^{-23{,}51 \cdot 0{,}0117} = \frac{12{,}15}{1{,}316} = 9{,}25.$$

Untersuchen wir noch den Bereich $\xi_0 = 0{,}03 \cdot 2\pi$, so erhalten wir:

$$K' = \frac{1}{0{,}12}\Big[\Phi(3{,}42 \cdot 0{,}0358) - \Phi(-3{,}42 \cdot 0{,}341)\Big] =$$

$$= \frac{1}{0{,}12}\Big[0{,}137 + 0{,}902\Big] = 8{,}64.$$

Das Ergebnis ist also: Soweit die bisherigen Beobachtungen über die Atomgewichte zur Beurteilung herangezogen werden können, ist die Wahrscheinlichkeitsdichte an der Stelle der Ganzzahligkeit mehr als neunmal, die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von höchstens $\pm$ 0,03 mehr als achtmal so groß als der betreffende Durchschnittswert.

1) In den letzten vier Spalten der Tabelle VI sind die sin und cos, die positiv und negativ auftreten und einander aufheben, gleich fortgelassen.

Zusatz. Berechnung des zyklischen Fehlerintegrals.

Herr S. Weich, Czernowitz, hatte die Freundlichkeit, auf meine Anregung eine kleine Tabelle für die von k und x abhängige Transzendente $\Psi(x, k)$, die analog dem Gaußschen Fehlerintegral durch

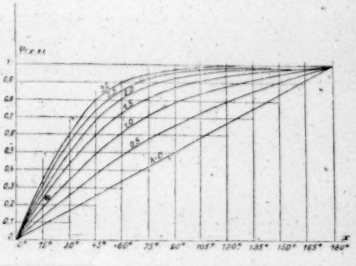


Fig. 7.

$$\Psi(x, k) = 2\int_0^x \psi(x_1\, k)\, dx = 2\,C(k)\int_0^x e^{k\cos x}\, dx \qquad (1)$$

definiert wird, zu berechnen (Tabelle VII). Die

Tabelle VII.

Werte des zyklischen Fehlerintegrals $\Psi(x, k)$.

x	$k=0$	$k=0{,}5$	$k=1{,}0$	$k=1{,}5$	$k=2{,}0$	$k=2{,}5$	$k=3{,}0$
0^0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15^0	0,0833	0,1285	0,1769	0,2230	0,2655	0,3001	0,3307
30^0	0,1667	0,2527	0,3423	0,4245	0,4952	0,5543	0,6034
45^0	0,2500	0,3691	0,4877	0,5909	0,6739	0,7384	0,7883
60^0	0,3333	0,4753	0,6087	0,7172	0,7978	0,8553	0,8955
75^0	0,4167	0,5702	0,7053	0,8074	0,8770	0,9220	0,9504
90^0	0,5000	0,6539	0,7805	0,8693	0,9250	0,9577	0,9762
105^0	0,5833	0,7273	0,8384	0,9112	0,9534	0,9763	0,9881
120^0	0,6667	0,7921	0,8835	0,9399	0,9707	0,9861	0,9936
135^0	0,7500	0,8500	0,9194	0,9605	0,9816	0,9918	0,9964
150^0	0,8333	0,9028	0,9493	0,9761	0,9905	0,9955	0,9980
165^0	0,9167	0,9522	0,9756	0,9885	0,9949	0,9978	0,9982
180^0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Berechnung erfolgt mit Hilfe der durchaus konvergenten Entwicklung:

$$\int_0^x e^{k\cos x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \int_0^x \cos^n x\, dx\,. \qquad (2)$$

Nach bekannten Sätzen der Analysis ist

$$\lim_{n=\infty} \int_0^x \cos^n x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{für } 0 < x < \pi,$$

$$= 0 \quad \text{„ } x = 0, \qquad (3)$$

$$\text{„ } x = \pi \text{ bei gerad. } n,$$

$$= 2\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{„ } x = \pi \text{ bei ungeradem } n.$$

Hieraus erhält man leicht eine Abschätzung des Restgliedes in (2). Analoge Betrachtungen wie die zu (3) führenden zeigen auch, daß bei festgehaltenem u:

$$\lim_{k=\infty} \Psi\left(\sqrt{\frac{2}{k}}\,u, k\right) = \Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du. \qquad (4)$$

Die Annäherung an die Grenzwerte in (3) und (4) erfolgt sehr rasch, so daß man namentlich (4) zu einer näherungsweisen Berechnung von Ψ für große k verwenden kann, wovon auch oben in Abschnitt 5 Gebrauch gemacht wurde.

(Eingegangen 14. Juli 1918.)

Über Koppelung von Elektronenringen und das optische Drehungsvermögen asymmetrischer Moleküle.

Von A. Landé.

§ 1. Über die Drehung der Polarisationsebene in organischen Verbindungen liegt ein umfangreiches experimentelles Material vor[1]). Einigermaßen allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten für die Größe des Drehungswinkels bei verschiedenen Substanzen sind jedoch nicht bekannt, abgesehen von wenigen nicht einmal ausnahmslos geltenden empirischen Regeln von beschränktem Umfang, welche für manche homologe Reihen asymmetrischer Kohlenstoffverbindungen eine Zunahme der optischen Aktivität bei Ersetzung einer Atomgruppe durch gewisse andre feststellen. So haben P. A. Guye und C. Brown (1890), durch theoretische Überlegungen geleitet, die Regel aufgestellt[2]): Die drehende Kraft eines asymmetrischen Tetraeders ist, abgesehen von einem konstanten Faktor, proportional dem „Asymmetrieprodukt"

$$P = \frac{(m_1 - m_2)(m_1 - m_3) \ldots (m_3 - m_4)}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)^6}$$

aus den Massen m_1 bis m_4 der Atomgruppen in den Tetraederecken. Doch fanden sich Ausnahmen von dieser Regel in solcher Anzahl, daß Guye schließlich die Überzeugung gewann „nicht nur die Massen der vier Gruppen, sondern auch ihre gegenseitige Lage, die Wirkungen, welche sie aufeinander ausüben, ihre Konfiguration und endlich die Natur der Elemente seien auf die Größe und den Sinn der Drehung von Einfluß". Landolt (l. c.) setzt hinzu: „Wegen dieser Kompliziertheit des Phänomens dürfte es auch auf andern Wegen nicht möglich sein, die numerische Relation zwischen Drehung und atomistischem Bau der Moleküle jemals aufzudecken."

Während die angeführten Regeln sich ausschließlich auf Parallelitäten zwischen den Drehungen homologer Reihen beziehen, fehlen theoretische Aussagen über die absolute Größe des Effekts gänzlich. Eine Abschätzung der Größenordnung ohne Eingehen auf die unbekannte Einzelstruktur spezieller organischer Flüssigkeiten ist aber möglich, wenn nur bestimmte Grundvorstellungen über den Mechanismus der optischen Aktivität vorliegen. Nun hat Herr Born die allgemeine Elektronentheorie der optisch aktiven Kristalle, isotropen und anisotropen Flüssigkeiten[1]) gegeben: Die quasielastisch an Gewichtslagen gebundenen Dispersionselektronen sollen außer von den Feldstärken des durchgehenden Lichtes noch von gegenseitigen Koppelungskräften angegriffen werden, über deren Natur zunächst nichts ausgesagt wird. Die Anwendung der Bornschen Formeln auf einfache mechanische Modelle führt aber zu äußerst verwickelten Abhängigkeiten der Drehungsgröße von der Art der gegenseitigen Koppelung und der Konfiguration der Elektronen im Molekül, die auch durch Näherungen nicht wesentlich vereinfacht werden können. Das naheliegendste Modell einer asymmetrischen Kohlenstoffverbindung, ein Tetraeder, welches geometrisch regulär ist und in dessen 4 Ecken Dispersionselektronen mit 4 verschiedenen quasielastisch isotropen Bindungen sitzen, gibt z. B. die Drehung Null wenn man nicht mindestens Größen 7. Ordnung in dem Verhältnis „wechselseitige Koppelungskraft zu Einzelbindungskraft" berücksichtigt[2]). Schwache Koppelungen führen dagegen bereits in 1. Näherung zu einer merklichen optischen Aktivität, wenn durch Einführung von anisotropen Bindungen oder nichtzentralen Koppelungskräften dem Modell ein besonders starker Schraubungssinn erteilt wird. Jedoch fehlt dann wieder die Möglichkeit, die Größe dieser Asymmetrieelemente aus bekannten Molekulareigenschaf-

1) Landolt, Das optische Drehungsvermögen. Braunschweig 1898.

2) Literatur dazu Landolt § 86.

1) M. Born, Dynamik der Kristallgitter. Leipzig 1915. Diese Zeitschr. **16**, 251, 1915; Ann. d. Phys. **55**, 177, 1918.

2) A. Landé, Ann. d. Phys. **56**, 225, § 6, 1918.

ten abzuleiten oder sie mit andern optischen Beobachtungen in Zusammenhang zu bringen, um ein Maß für die zu erwartenden Drehungen zu erhalten. Nur in der neueren Theorie der Atomstruktur von Bohr, Debye, Sommerfeld u. a. treten anisotrope Bindungen ohne Einführung neuer Konstanten auf, welche im folgenden zu einer Abschätzung der Größenordnung des Dreheffekts verwendet werden sollen.

Ein kreisendes Bohrsches Elektron verhält sich dispersionstheoretisch wie ein anisotrop gebundenes Elektron, von dessen drei Haupteigenfrequenzen zwei zusammenfallen. Bereits bei der sehr schwachen elektrostatischen gegenseitigen Beeinflussung ihrer Schwingungen stellen nun zwei solche anisotrop gebundene Elektronen einen optisch aktiven Mechanismus dar; der Drehungswinkel wird proportional der Breite der beiden aus den Haupteigenfrequenzen gebildeten Duplets und hängt noch von der etwas schief anzunehmenden gegenseitigen Orientierung der anisotropen Hauptrichtungen ab. Die gesamte Aktivität des Moleküls setzt sich dann additiv aus den Beiträgen zusammen, welche die Kombinationen von je 2 seiner Elektronenringe liefern. Zwar können diese Beiträge der einzelnen Paare bald positives, bald negatives Vorzeichen haben. Trotzdem genügen aber die aus der Dispersion bekannten Anisotropien, um wenigstens zu einer Abschätzung für die Größenordnung der optischen Aktivität zu gelangen. Es zeigt sich gute Übereinstimmung mit der Erfahrung. Zu diesem Resultat führt außer der Vorstellung von Elektronenringen wieder die allgemeine Theorie, welche Born zur Ableitung der optischen Aktivität aufstellte, speziell **1.** die Kleinheit aber Endlichkeit der Moleküldimensionen im Vergleich zur Wellenlänge des auffallenden Lichtes, **2.** die Wechselwirkung zwischen den Partikeln ein und desselben Moleküls; letztere werden wir auf elektrostatische Kräfte der Elektronen zurückführen können. Unter dem Einfluß der Lichtfeldstärken erhält dann jeder Elektronenring ein periodisches Moment, dessen Größe noch von seiner Orientierung gegen die im Raum feste Lichtschwingungsrichtung abhängt. Durch Mittelung über alle möglichen Orientierungen des Moleküls, bei denen aber die relative Lage der verschiedenen Ringe gegeneinander erhalten bleibt, wird eine lineare Beziehung zwischen Feldstärke und Moment der Volumeinheit abgeleitet, deren Koeffizienten für die Brechung und Dispersion und für die Drehung der Polarisationsebene bestimmend sind.

§ 2. Jede Atomgruppe in den Ecken des Moleküls werde dispersionstheoretisch dargestellt durch einen Elektronenring, welcher mit quantenhaft festgelegter Umlaufsfrequenz um eine im Molekül feste Achse rotiert. Ein Ring (*) habe als Rotationsachse den Einheitsvektor $\mathfrak{Z}$ und die Umlaufsfrequenz ω, er bestehe aus μ Elektronen der Masse m und Ladung ε. Die Verbindung r vom Mittelpunkt des Ringes (*) zu einem Ringe (′) falle in Richtung des Einheitsvektors $\mathfrak{R}$. Unter dem Einfluß einer mit der Frequenz s periodischen elektrischen Feldstärke $\mathfrak{K}$, am Orte des Ringes (*) zu nehmen, wird der Ring (*) verschoben und verzerrt; im Mittel über alle zufälligen Anfangsphasen der Kreisbahn stellt der Ring (*) ein periodisches Moment $\mathfrak{p}$ dar mit den Komponenten in einem $x\,y\,z$-System (z-Achse $\| \mathfrak{Z}$)

$$\mathfrak{p}_x = -\frac{\varepsilon^2\mu}{m\omega^2}\left|\mathfrak{K}_x\,\frac{f_+ + f_-}{2} + i\,\mathfrak{K}_y\,\frac{f_+ - f_-}{2}\right|$$

$$\mathfrak{p}_y = -\frac{\varepsilon^2\mu}{m\omega^2}\left|-i\,\mathfrak{K}_x\,\frac{f_+ - f_-}{2} + \mathfrak{K}_y\,\frac{f_+ + f_-}{2}\right|$$

$$\mathfrak{p}_z = -\frac{\varepsilon^2\mu}{m\omega^2}\cdot\mathfrak{K}_z\,\varphi \qquad (1)$$

worin $f_+ = f\left(+\frac{s}{\omega}\right)$, $f_- = f\left(-\frac{s}{\omega}\right)$ und $\varphi = \varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)$

bekannte Funktionen von $\frac{s}{\omega}$ und μ sind, deren explizite Form bei Debye, Sommerfeld u. a.[1]) benutzt wird. Uns interessiert im folgenden nur die optische Aktivität für kleine Lichtfrequenzen $s \ll \omega$, für welche die imaginären Glieder in (1) verschwindende Koeffizienten bekommen. Übrig bleibt also mit der Abkürzung

$$a = -\frac{\varepsilon^2\mu}{m\omega^2}\,f(0),\quad b = -\frac{\varepsilon^2\mu}{m\omega^2}\,\varphi(0),$$

$$\mathfrak{p}_x = a\,\mathfrak{K}_x,\ \mathfrak{p}_y = a\,\mathfrak{K}_y,\ \mathfrak{p}_z = b\,\mathfrak{K}_z. \qquad (2)$$

Setzt man den Vektor $\mathfrak{K}$ aus einem Vektor in der $\mathfrak{Z}$-Richtung $\mathfrak{Z}\cdot(\mathfrak{K}, \mathfrak{Z})$ und einem darauf senkrechten Vektor $\mathfrak{K} - \mathfrak{Z}\cdot(\mathfrak{K}, \mathfrak{Z}) = [\mathfrak{Z}\,[\mathfrak{K}, \mathfrak{Z}]]$ zusammen und den Vektor $\mathfrak{p}$ aus entsprechenden zwei Vektoren, so wird aus (2) in vektorieller Schreibweise:

$$\mathfrak{p} - \mathfrak{Z}\,(\mathfrak{p}\,\mathfrak{Z}) = a\,\{\mathfrak{K} - \mathfrak{Z}\,(\mathfrak{K}\,\mathfrak{Z})\},$$
$$\mathfrak{Z}\,(\mathfrak{p}\,\mathfrak{Z}) = b\cdot\mathfrak{Z}\,(\mathfrak{K}\mathfrak{Z})$$

oder addiert

$$\mathfrak{p} = a\,\mathfrak{K} + (b - a)\,\mathfrak{Z}\,(\mathfrak{K}\,\mathfrak{Z}). \qquad (2')$$

Die Kraft $\mathfrak{K}$ setzt sich hier zusammen aus der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ des einfallenden Lichtes und aus Zusatzkräften $\mathfrak{F}(')$, herrührend von den übrigen Ringen (′) des Moleküls. Letztere besitzen nämlich ein periodisches Moment

$$\mathfrak{p}' = a'\,\mathfrak{K}' + (b' - a')\,\mathfrak{Z}'\cdot(\mathfrak{K}'\,\mathfrak{Z}'), \qquad (3)$$

wirken also auf den Ring (*) mit der Kraft

$$\mathfrak{F}(') = \frac{1}{r^3}\,[\mathfrak{R}\,[\mathfrak{p}', \mathfrak{R}]] = \frac{1}{r^3}\left\{\mathfrak{p}' - \mathfrak{R}\,(\mathfrak{p}', \mathfrak{R})\right\}. \qquad (4)$$

1) P. Debye, Münchner Akademieberichte 1915, S. 1; A. Sommerfeld, Festschrift Elster und Geitel. Derselbe Ann. d. Phys. **53**, 497, § 2, 1917.

Sind diese Zusatzkräfte $\mathfrak{F}_{(')}$ schwach gegen $\mathfrak{E}$, so wird man bei ihrer Berechnung nach (4) $\mathfrak{p}'$ nicht aus (3), sondern aus

$$\mathfrak{p}' = a'\mathfrak{E}' + (b'-a')\,\mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{E}'\mathfrak{Z}')$$

entnehmen dürfen, worin $\mathfrak{E}'$ die an der Stelle (') auftretende Feldstärke ohne Zusatz ist. Diese hängt mit der Feldstärke $\mathfrak{E}$ zusammen durch

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}\, e^{\frac{2i\pi}{\lambda} r(\mathfrak{s}\,\mathfrak{R})} = \mathfrak{E}\,(1 + \frac{2i\pi}{\lambda} r(\mathfrak{s}\,\mathfrak{R}) + \ldots),$$

wenn $\mathfrak{s}$ die Wellennormale und λ die Wellenlänge der Wellen in der Substanz bedeuten. Im Gebiet der optischen Wellen kann man sich auf die beiden hingeschriebenen Glieder der Reihe nach $\frac{r}{\lambda}$ beschränken, und erhält dann aus (4)

$$\mathfrak{F}_{(')} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{2i\pi}{\lambda}\, r\,(\mathfrak{s}\,\mathfrak{R})\right) \times \Big\{a'\mathfrak{E} + \tag{4'}$$
$$+ (b'-a')\,\mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{E}\mathfrak{Z}') - \mathfrak{R}\Big(\mathfrak{R}, a'\mathfrak{E} + (b'-a')\,\mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{E}\mathfrak{Z}')\Big)\Big\}$$

als die von (') herrührende, auf (*) wirkende Zusatzkraft. Im ganzen ist also aus (4')

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{E} + \Sigma' \mathfrak{F}_{(')} = \mathfrak{E} + \Sigma' \frac{1}{r^3}\Big\{\ldots\Big\} + \\ + \frac{2i\pi}{\lambda}\Sigma' \frac{1}{r^2}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{R})\Big\{\ldots\Big\}$$

in (2') einzuführen. Dann zerfällt auch $\mathfrak{p}$ in einen von λ freien und in einen mit $\frac{2i\pi}{\lambda}$ proportionalen Teil. Während der erstere die Brechung und Dispersion gibt, führt der letztere zur optischen Aktivität, die uns hier allein interessiert. Der mit $\frac{2i\pi}{\lambda}$ proportionale Teil von $\mathfrak{p}$ zerfällt, wie $\Sigma' \mathfrak{F}_{(')}$, weiter in Einzelbeiträge der einzelnen Ringe ('), welche wir $\mathfrak{p}_{(')}$ nennen wollen. Es wird dann im ganzen

$$\mathfrak{p} = \begin{Bmatrix}\text{von } \lambda \\ \text{freier Teil}\end{Bmatrix} + \Sigma' \mathfrak{p}_{(')} \tag{5}$$

mit

$$\mathfrak{p}_{(')} = \frac{2i\pi}{\lambda}\frac{1}{r^2}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{R}) \times \tag{5'}$$
$$a\Big\{a'\mathfrak{E} + (b'-a')\,\mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{E}\mathfrak{Z}') - \\ \mathfrak{R}\cdot\Big(\mathfrak{R}, a'\mathfrak{E} + (b'-a')\,\mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{E}\mathfrak{Z}')\Big)\Big\} \\ + (b-a)\,\mathfrak{Z}\Big(\mathfrak{Z}, a'\mathfrak{E} + (b'-a')\,\mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{E}\mathfrak{Z}') - \\ - \mathfrak{R}\,(\mathfrak{R}, a'\mathfrak{E} + (b'-a')\,\mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{E}\mathfrak{Z}'))\Big)$$

$\mathfrak{p}$ ist damit ausgedrückt als Funktion der an der Stelle (*) herrschenden Feldstärke $\mathfrak{E}$.

§ 3. Ebenso kann man für einen anderen Ring das Moment $\mathfrak{p}^*$ als lineare Vektorfunktion der an seinem Ort herrschenden Feldstärke $\mathfrak{E}^*$ darstellen. Tut man dies für alle Ringe der N Moleküle pro Volumeinheit, so erhält man als Moment der Volumeinheit aus (5)

$$\mathfrak{P} = \begin{Bmatrix}\text{von } \lambda \\ \text{freier Teil}\end{Bmatrix} + N\,\Sigma^*\Sigma'\mathfrak{p}^*_{(')}, \tag{6}$$

wenn man noch über alle Orientierungen der N Moleküle gegen die im Raum festen Richtungen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{s}$ mittelt. Statt des zweiten, mit $\frac{2i\pi}{\lambda}$ proportionalen Teils von $\mathfrak{P}$ kann man auch schreiben

$$\frac{N}{2}\,\Sigma^*\Sigma'\,(\mathfrak{p}^*_{(')} + \mathfrak{p}'_{(')})$$

und es handelt sich darum, die angeführte Mittelung auf $(\mathfrak{p}^*_{(')} + \mathfrak{p}'_{(')})$ anzuwenden. Aus (5') folgt wegen $\mathfrak{R}_{12} = -\mathfrak{R}_{21}$, wenn man noch umordnet, als Beitrag des Ringpaares (*')

$$\begin{Bmatrix}(\mathfrak{p}^*_{(')} + \mathfrak{p}'_{(')}) = i\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{r^2}(\mathfrak{s}\,\mathfrak{R}) \times \\ a\,a'\Big\{\mathfrak{E} - \mathfrak{R}\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{E}) - \mathfrak{E} + \mathfrak{R}\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{E})\Big\} + \\ a\,(b'-a')\Big\{\mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{Z}') - \mathfrak{R}\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z}')\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{Z}') - \\ - \mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{Z}') + \mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{Z}'\,\mathfrak{R})\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{E})\Big\} + \\ a'\,(b-a)\Big\{\mathfrak{Z}\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{Z}) - \mathfrak{Z}\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z})\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{R}) - \mathfrak{Z}\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{Z}) + \\ + \mathfrak{R}\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z})\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{Z})\Big\} + \\ (b-a)\,(b'-a')\Big\{\mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}')(\mathfrak{E}\mathfrak{Z}') - \mathfrak{Z}(\mathfrak{Z}\mathfrak{R})(\mathfrak{R}\mathfrak{Z}')(\mathfrak{E}\mathfrak{Z}') - \\ - \mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}')\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{Z}) + \mathfrak{Z}'\,(\mathfrak{Z}'\,\mathfrak{R})\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z})\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{Z})\Big\}.\end{Bmatrix}$$

Hierin heben sich die Glieder des Faktors von aa' sofort gegenseitig weg, ebenso in den Faktoren von $a\,(b'-a')$ und $a'\,(b-a)$ das erste gegen das dritte Glied. Den Rest kann man so schreiben

$$(\mathfrak{p}^*_{(')} + \mathfrak{p}'_{(')}) = i\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{r^2} \times \\ a\,(b'-a')\Big\{(\mathfrak{s}\,\mathfrak{R})\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z}')\Big[\mathfrak{E}\,[\mathfrak{Z}'\,\mathfrak{R}]\Big]\Big\} + \\ + a'\,(b-a)\Big\{(\mathfrak{s}\,\mathfrak{R})\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z})\Big[\mathfrak{E}\,[\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z}]\Big]\Big\} \\ + (b-a)\,(b'-a')\Big\{(\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}') - (\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z})\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z}')\Big\} \tag{7} \\ \times (\mathfrak{s}\,\mathfrak{R})\Big[\mathfrak{E}\,[\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}']\Big].$$

Bei der Mittelung wird $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{E}$ im Raume festgehalten, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$ unter Wahrung ihrer rela-

tiven Richtungen im Raume gedreht. Da zu jeder Lage von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}'$ eine entgegengesetzte Lage $-\mathfrak{R}$, $-\mathfrak{Z}'$ gehört, kehrt in dem Faktor von $a\,(b'-a')$ bei dieser Umkehrung ($\mathfrak{s}\,\mathfrak{R}$) sein Vorzeichen um, während ($\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z}'$) und [$\mathfrak{Z}'\,\mathfrak{R}$] unverändert bleiben; daher ist im Mittel der Faktor von $a\,(b'-a')$ gleich Null, ebenso auch der Faktor von $a'\,(b-a)$. Der bei Drehung des Moleküls im Raum veränderliche Faktor von $(b-a)\,(b'-a')$ ist ($\mathfrak{s}\,\mathfrak{R}$) [$\mathfrak{E}\,[\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}']$] mit der x-Komponente

$$(\mathfrak{s}_x\,\mathfrak{R}_x+\mathfrak{s}_y\,\mathfrak{R}_y+\mathfrak{s}_z\,\mathfrak{R}_z)\,(\mathfrak{E}_y\,\mathfrak{A}_z-\mathfrak{E}_z\,\mathfrak{A}_y)\quad(7'')$$

($\mathfrak{A}=[\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}']$ gesetzt).

Führt man eine solche Drehung des Moleküls aus, daß $\mathfrak{R}$ in $-\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{A}$ in $-\mathfrak{A}$ umschlägt, so kehren alle Produkte $\mathfrak{R}_p\,\mathfrak{A}_q$ ihr Vorzeichen um außer $\mathfrak{R}_x\,\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{R}_y\,\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{R}_z\,\mathfrak{A}_z$.

Letztere drei Produkte haben aber den gleichen Mittelwert

$$\overline{\mathfrak{R}_x\,\mathfrak{A}_x}=\frac{1}{3}\,(\overline{\mathfrak{R}_x\,\mathfrak{A}_x}+\overline{\mathfrak{R}_y\,\mathfrak{A}_y}+\overline{\mathfrak{R}_z\,\mathfrak{A}_z})=\frac{1}{3}\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{A}).$$

Obige x-Komponente ($7''$) hat also als Mittelwert

$$(-\mathfrak{s}_y\,\mathfrak{E}_z+\mathfrak{s}_z\,\mathfrak{E}_y)\,\frac{1}{3}\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{A})=[\mathfrak{E},\mathfrak{s}]_x\,\frac{1}{3}\,(\mathfrak{R}\,[\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}'])$$

und der Mittelwert von (7) reduziert sich auf

$$\mathfrak{p}^*_{(')}+\mathfrak{p}'_{(*)}=i\,[\mathfrak{E}\mathfrak{s}]\,\frac{2\pi}{3\lambda}\,\frac{1}{r^2}\,(b-a)\,(b'-a')\qquad(8)$$

$$\times\left\{(\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}')-(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z})\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z}')\right\}(\mathfrak{R},[\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}']).$$

Nach (6) wird dann die Polarisation der Volumeinheit

$$\begin{cases}\mathfrak{P}=\left|\begin{matrix}\text{von }\lambda\\ \text{freier Teil}\end{matrix}\right\}+i\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{s}]\,\psi\quad\text{mit}\\ \psi=\Sigma^*\,\Sigma'\,\psi_{*'}=\dfrac{2\pi N}{3\lambda}\,\Sigma^*\,\Sigma'\,\dfrac{1}{r^2}\\ \qquad(b-a)\,(b'-a')\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z})\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z}')\cdot(\mathfrak{R},[\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}']).\end{cases}\qquad(9)$$

Während der von λ freie Teil, welcher proportional $\mathfrak{E}$ ist, die Brechung und Dispersion gibt, ist ψ der Parameter der optischen Aktivität [1]). Der Drehungswinkel Θ der Polarisationsebene pro Längeneinheit der Substanz ist gegeben durch

$$\Theta=\frac{2\pi}{2\lambda}\left(\frac{n_0^2+2}{3}\right)^2\cdot\psi\qquad(10)$$

(n_0 = Brechungsindex für lange Wellen).

ψ setzt sich — eine Folge unsrer Annahme schwacher gegenseitiger Störungen — aus den Beiträgen $\psi_{*'}$ je zweier Elektronenringe (*) und ($'$) additiv zusammen.

Da aber die Beiträge $\psi_{*'}$ je nach der Orientierung der Kreiselachsen (*) und ($'$) im Molekül bald positiv, bald negativ ausfallen, können sich die $\psi_{*'}$ teils gegenseitig verstärken, teils schwächen, und der gesamte Drehungseffekt wird in komplizierter Weise von den Orientierungen der verschiedenen Kreiselachsen gegeneinander abhängen.

Zwei Achsen z und z' werden sich im allgemeinen nicht in einem Punkt treffen, sondern windschief in einer gewissen Entfernung l aneinander vorbeizeigen; eine einfache geometrische Überlegung zeigt, daß

$$r\cdot(\mathfrak{R}\,[\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}'])=l\cdot\sin(\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}')\qquad(10')$$

ist. Die Projektionen $\mathfrak{Z}_N$ und $\mathfrak{Z}'_N$ auf die zu $\mathfrak{R}$ normale Ebene N bilden in dieser Ebene einen Winkel $\measuredangle\zeta$, und es ist

$$([\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z}]\cdot[\mathfrak{R}\,\mathfrak{Z}'])=\mathfrak{Z}_N\cdot\mathfrak{Z}'_N\cdot\cos\zeta.$$

Mit Benutzung von (2) wird also der dimensionslose Parameter ψ der optischen Aktivität für lange Wellen λ

$$\psi=\Sigma^*\,\Sigma'\,\psi_{*'}=\frac{2\pi N}{3\lambda}\,\Sigma\,\Sigma\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\varepsilon^2\mu}{m\,\omega_k^2}\,(f_0-\varphi_0)\cdot$$

$$\cdot\,\frac{\varepsilon^2\mu'}{m\,\omega_{k'}^2}\,(f'_0-\varphi'_0)\cdot W_{*'}\qquad(11)$$

worin die Winkelfunktion $W_{*'}$ gegeben ist durch

$$W_{*'}=\mathfrak{Z}_N\,\mathfrak{Z}'_N\cos\zeta\cdot\frac{l}{r}\,\sin(\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z}').\qquad(12)$$

$W_{*'}$ und $\psi_{*'}$ werden also gleich Null, **1.** wenn die beiden Achsen z und z' durch einen Punkt gehen, **2.** wenn die beiden Achsenrichtungen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}'$ parallel zeigen, **3.** wenn eine der Achsen oder beide parallel zu $\mathfrak{R}$ zeigen, **4.** wenn die durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}$ gelegte Ebene senkrecht auf der durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}'$ gelegten Ebene steht.

§ 4. Wir wollen nun wenigstens die Größenordnung der Einzelbeiträge $\psi_{kk'}$ abschätzen. Der in (9) nicht ausgeschriebene von λ freie Teil hat die Form $\mathfrak{E}\cdot\Phi=\mathfrak{E}\cdot\Sigma\,\Phi_k$, worin (bei vernachlässigter gegenseitiger Störung der Elektronenringe gegenüber ihren ungestörten Dispersionsschwingungen) Φ_k gegeben ist [1]) durch

$$\Phi_k=-\frac{N}{3}\,\frac{\varepsilon^2\mu_k}{m\,\omega_k^2}\left\{2\overset{(k)}{f_0}+\overset{(k)}{\varphi_0}\right\}\qquad(13)$$

Φ hängt mit dem Brechungsindex n für lange Wellen und der „molekularen Refraktion“ Ξ [2]) zusammen durch

$$\Phi=(n^2-1)\cdot\frac{3}{n^2+2},\quad\Xi=\frac{\Phi}{3}\times\frac{\text{Molekulargewicht}}{\text{Dichte}}$$

$$=\frac{\Phi}{3}\,\frac{M}{D}.\qquad(14)$$

1) M. Born, diese Zeitschr. **16**, 251, Gl. (24), 1915.

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **53**, 498, Gl. (7), 1917.

2) Vgl. Goldhammer, Dispersion und Absorption. Leipzig 1913, § 27.

Nach einer von F. Martens geprüften Regel ist aber die molekulare Refraktion Ξ die Summe der „Atomrefraktionen" ξ_k, welche mit Φ_k analog (14) zusammenhängen durch

$$\Phi_k = (n_k^2 - 1)\frac{3}{n_k^2 + 2}, \qquad (14')$$

$$\xi_k = \frac{\Phi_k}{3} \propto \frac{\text{Atomgewicht}}{\text{Dichte } (k)} = \frac{\Phi_k}{3}\cdot\frac{A_k}{D_k}.$$

Faßt man unter k im Beispiel einer organischen Verbindung eine ganze Atomgruppe zusammen, welche dispersionstheoretisch durch den Elektronenring (k) repräsentiert sein soll, so wird nach (13) (14')

$$\frac{-\varepsilon^2\mu_k}{m\omega_k^2} = \frac{3}{N}\frac{\Phi_k}{2f_0 + \varphi_0} = \frac{9}{N}\frac{\xi_k D_k}{A_k}\cdot\frac{1}{2f_0 + \varphi_0}.$$

Dies in (11) eingesetzt, gibt

$$\psi_{kk'} = \frac{2\pi N}{3\lambda}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{81}{N^2}\cdot\frac{\xi_k D_k}{A_k}\cdot\frac{\xi_{k'} D_{k'}}{A_{k'}} \cdot \frac{\frac{f_0}{\varphi_0} - 1}{2\frac{f_0}{\varphi_0} + 1} \times \frac{\frac{f'_0}{\varphi'_0} - 1}{2\frac{f'_0}{\varphi'_0} + 1}\cdot W_{(kk')} \qquad (15)$$

Nach Sommerfeld[1]) ist nun

$$\frac{f_0}{\varphi_0} = \frac{18{,}34 - 6\cdot\ln\mu}{(3{,}06\ln\mu + 11{,}7)\,0{,}98}$$

eine mit der Zahl μ der Ringelektronen nur langsam veränderliche Zahl. Aus ihr folgt z. B. für $\mu = 1$ bzw. $\mu = 4$ der Faktor

$$\frac{\frac{f_0}{\varphi_0} - 1}{2\frac{f_0}{\varphi_0} + 1} = \begin{cases} \frac{1}{7} & \text{für } \mu = 1 \\ -\frac{1}{6{,}2} & \text{für } \mu = 4 \end{cases}$$

als Maß für die relative Breite der aus den beiden anisotropen Hauptfrequenzen gebildeten Duplets für 1 bzw. 4 Ringelektronen. Wir nehmen für beide Ringe k und k' den Wert rund $+\frac{1}{7}$. Ferner hat man

$$N = \frac{6{,}2\cdot 10^{23}}{M}, \quad r_{kk'} = 2\cdot 10^{-8}\text{ cm},$$

$$\lambda_{Na} = 5{,}89\cdot 10^{-5}\text{ cm}.$$

Für die Dichten

$$D_k = D \propto \text{Atomgruppen-Gewicht}$$

nehmen wir rund $\frac{1}{4}$, weil die Dichten D der aktiven Substanzen selbst in der Nähe des Wertes 1 liegen. Für die Quotienten $\xi_k : A_k$ besteht der Durchschnittswert $^1/_6$; bei einer großen Zahl von Substanzen mit wenigen Ausnahmen weicht er nur wenig von $^1/_6$ ab[1]).

Daher wird aus (15) (10)

$$\psi = \Sigma\Sigma\psi_{kk'} = +\frac{2\pi}{3\cdot 5.89\cdot 10^{-5}}\cdot\frac{1}{4\cdot 10^{-16}} \propto \frac{81\,M}{6{,}2\cdot 10^{23}}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{49}\cdot\Sigma\Sigma W_{kk'}$$

$$\psi = 0{,}04\cdot 10^{-5}\,M\,\Sigma\Sigma W_{kk'}$$

$$\Theta = \Sigma\Sigma\Theta_{kk'} = \frac{M}{50}\Sigma\Sigma W_{kk'} \qquad (16)$$

mit der noch unbekannten Winkelfunktion $W_{kk'}$. Nun zeigt die Erfahrung, daß erst vier verschiedene zu einem asymmetrischen Tetraeder zusammentretende Atomgruppen oder noch kompliziertere Moleküle optisches Drehungsvermögen besitzen. Nach der Vorstellung der kreisenden Elektronenringe müßten aber bereits Moleküle aus 2 oder 3 solchen Gruppen optisch aktive Substanzen liefern, ebenso auch 4 Atomgruppen, welche nicht alle verschieden sind. Daß solche Verbindungen aber tatsächlich inaktiv sind, kann nach unsrer Vorstellung nur daher kommen, daß entweder sämtliche Summanden $\Psi_{kk'}$ einzeln verschwinden oder sich paarweise aufheben. Das erstere wird der Fall sein bei 2 oder 3 Atomgruppen im Molekül; die 2 bzw. 3 Kreiselachsen werden sich aus Symmetriegründen in einer einzigen Ebene einstellen, so daß sich je zwei Achsen in einem Punkt schneiden und die Größe $l_{kk'}$ aus (10') verschwindet, daher $W_{kk'} = 0$. (12) Bei 4 Atomgruppen, I II III IV, von denen etwa I und II identisch sein mögen, wird die durch III, IV und die Mitte von $r_{I\,II}$ gelegte Ebene Symmetrieebene des Moleküls sein, also $l_{I\,II} = 0$, $l_{III\,IV} = 0$, dazu $\sin\overset{(I)\ (III)}{(3\ \ 3)} = -\sin\overset{(II)\ (III)}{(3\ \ 3)}$ und $\sin\overset{(I)\ (IV)}{(3\ \ 3)} = -\sin\overset{(II)\ (IV)}{(3\ \ 3)}$. Wird jetzt die Gruppe II durch eine von allen andern verschiedene Gruppe ersetzt, so werden die Kanten $r_{kk'}$ des dadurch entstehenden asymmetrischen Tetraeders, verglichen mit denen im Symmetriefall, in ihrer Länge verändert und in ihrer gegenseitigen Orientierung um gewisse Winkelbeträge verdreht sein. Um Winkelbeträge derselben Größenordnung müssen sich dann auch die Kreiselachsen verdrehen, um unter den neuen Verhältnissen stabile Lagen einzunehmen. Nun ist auch die Windschiefe l/r (10') gleich einem Verdrehungswinkel, nämlich gleich dem im Symmetriefall verschwindenden Winkel (genauer dessen Sinus) zwischen der Richtung $[3\,3']$ und

1) A. Sommerfeld, l. c. § 4, S. 512.

1) Vgl. die Tabellen bei Goldhammer, l. c. § 27.

der auf $\mathfrak{N}$ normalen Ebene N. Die andern Faktoren von $W_{kk'}$ (12), nämlich $\mathfrak{Z}'_N \mathfrak{Z}_N \cos(\zeta_{kk'}) \sin(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}')$ sind von der Größenordnung 1 auch im Asymmetriefall. Daher kann man $W_{kk'}$ vergleichsweise im Maß eines Winkels $W_{kk'}$ angeben, der von derselben Größenordnung ist, wie die Verdrehungswinkel der Kanten $r_{kk'}$ bei der Umwandlung eines symmetrischen in ein asymmetrisches Molekül; es wird sich um Winkel von etwa 5 bis 15 Grad handeln. Daher hat man in (16) für $W_{kk'}$ Winkel von etwa 5—15 Grad einzusetzen, deren genaue Werte von Fall zu Fall anders ausfallen. Θ ist dann im selben Winkelmaß wie $W_{kk'}$ gegeben. Die so abgeschätzte Größenordnung für die Drehung der Polarisationsebene pro cm stimmt gut mit den in weiten Grenzen schwankenden tatsächlichen Werten bei optisch aktiven organischen Verbindungen überein. Man findet, bei Molekulargewichten M der Größenordnung 100, Drehungswinkel von durchschnittlich 50^0, zuweilen kleinere von 5^0 bis zu größeren von 200^0, die durch die verschiedenartigsten Umstände bei der gegenseitigen Orientierung der Atomgruppen und der dadurch bedingten Verstärkung oder Schwächung der einzelnen Summanden des Drehungsparameters $\psi = \Sigma\Sigma\psi_{kk'}$ zustande kommen.

(Eingegangen 26. Juli 1918.)

Über das Bohrsche Atommodell.

Von Arthur Szarvassi.

Das wahre Wesen des Bohrschen Atommodells ist uns bis heute unbekannt. Wir verstehen nicht, daß das Elektron in seinen „stabilen" Bahnen keine Strahlung aussenden soll; man sieht nicht ein, wieso diese Bahnen wirklich stabil sind; es ist unverständlich, daß der Übergang von einer „stabilen" Bahn zu einer anderen mit einer homogenen Strahlung verbunden ist; und es ist vollends unklar, warum die Energieänderung bei diesem Übergange dem Produkte aus dem Planckschen Wirkungsquantum h und der Schwingungszahl ν der emittierten Strahlung gleich sein soll. Sicher sind nur die Resultate, und da wohl niemand die Berechnung der Rydbergschen Konstante aus molekularen Daten und die Darstellung von ν durch die Balmersche Formel für einen bloßen Zufall halten wird, stehen wir vor der Aufgabe, die schöne Entdeckung Bohrs richtig zu deuten. Man ahnt aber, daß die bisherige Darstellung, die soviel Unverständliches enthält, nur ein Bild, der wirkliche Sachverhalt aber rein statistischer Natur ist. Diese Ahnung täuscht nicht: was eine rätselhafte Eigenschaft eines Bohrschen Atoms schien, ist in Wahrheit eine statistische, durch das Zusammenwirken vieler Atome bewirkte Erscheinung. Ich glaube, im folgenden die richtige Darstellung des Sachverhaltes geben zu können.

1.

Wir betrachten eine große Zahl Bohrscher Atome von der bekannten Konstitution: ein Elektron mit der Ladung $-e$ umlaufend um einen Kern mit der Ladung $+e$. Ist die Masse des Kernes, wie wir annehmen wollen, groß gegen die Masse m des Elektrons, so beschreibt das letztere eine Keplersche Ellipse um den Kern. Die Energie eines solchen Systems ist, ausgedrückt in Polarkoordinaten r, φ:

$$W = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{e^2}{r} + V_0,$$

indem bei der potentiellen Energie noch ein konstanter Summand V_0 willkürlich wählbar ist. Soll nun die Verteilung der Systeme auf die möglichen Werte der Zustandsveränderlichen statistisch untersucht werden, so sind nach den Gesetzen der statistischen Mechanik als Phasenvariable zu wählen $r, \varphi, p_r = m\dot{r}$ und $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$. Die Verteilung in diesem vierdimensionalen Phasenraum hat Sommerfeld[1]) ersetzt durch die Verteilungen in den beiden zweidimensionalen Räumen: dem r-p_r-Raum und dem φ-p_φ-Raum. Man erhält für die Energie der Systeme, welche in der $n_1$ten Zelle des r-p_r-Raumes und in der $n_2$ten Zelle des φ-p_φ-Raumes liegen, den Wert

$$W_{n_1 n_2} = -\frac{Nh}{(n_1 + n_2)^2} + V_0,$$

indem man

$$\frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} = N \quad \text{(Rydbergsche Konstante)}$$

setzt und mit h wie gewöhnlich die Plancksche Konstante bezeichnet. Bohr und Sommerfeld haben $V_0 = 0$ gesetzt. Diese Wahl ist aber aus einem gewichtigen Grunde nicht angängig: es stellt nämlich die Summe aller $W_{n_1 n_2}$, genommen über alle Atome, die beobachtbare innere Energie des Körpers vor, aus welcher die Strahlung der Atome herstammt, also z. B. die Energie des Wasserstoffs in einer Vakuumröhre, welche sich in die Strahlungsenergie der Balmerschen Serie umsetzt. Diese Energie ist aber wesentlich positiv, und es ist daher unmöglich, daß sie durch Summierung von lauter negativen Gliedern gebildet wird. Deshalb muß V_0 von 0

1) A. Sommerfeld, Zur Theorie der Balmerschen Serie. Sitzungsber. d. bayr. Akad. 1915, S. 425.

verschieden, und zwar positiv sein. Durch die Wahl dieser Größe hat man es in der Hand, die Energie einer Zelle willkürlich zu bestimmen, was auch sachlich gerechtfertigt ist. Setzt man z. B. $W_{1,1} = 0$, so ist

$$V_0 = \frac{Nh}{4}$$

und allgemein

$$W_{n_1,n_2} = Nh\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(n_1+n_2)^2}\right).$$

Jetzt sind also die Energien aller Atome positiv, die Energie wächst mit wachsender Ordnungszahl und nähert sich für sehr große Ordnungszahlen dem Werte V_0. Führen wir noch die Abkürzung

$$n_1 + n_2 = n$$

ein, so erhalten wir

$$W_n = Nh\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \quad (1)$$

2.

Wenn eine gewisse Menge Wasserstoff die ihm eigentümliche Strahlung frei aussendet, so bedeutet dies einen beständigen Verlust an Energie. Soll also der Zustand stationär sein, so muß dieser Verlust durch Energiezufuhr von irgendeiner Quelle her fortwährend ersetzt werden. Die Energie des Wasserstoffs bleibt dann erhalten, und dieser spielt nur die Rolle eines Überträgers der Energie von der Energiequelle in Form von Strahlung an die Außenwelt. Beispielsweise kann man sich den Vorgang so denken, daß die Elektronen der Bohrschen Atome zwar durch Ausstrahlung an Bewegungsenergie einbüßen, daß aber dafür durch ein äußeres elektrisches Feld neue Bewegungsenergie im selben Betrage geschaffen wird. Man kann sich dann ein idealisiertes und vereinfachtes Bild der Erscheinung in der Weise konstruieren, daß man die beiden Vorgänge der Ausstrahlung und der Energiezufuhr, welche einander — statistisch, nicht am einzelnen Atom — aufheben, ganz wegläßt, und die Atome als energetisch abgeschlossene Systeme behandelt. Dies ist nun der Standpunkt bei der Bohrschen Behandlungsweise des Problems, und unter dieser Voraussetzung ist die Gleichung (1) abgeleitet. Daraus folgt, daß man aus den Eigenschaften des Atoms nicht unmittelbar auf die Eigenschaften der ausgesandten Strahlung schließen kann, sondern dies auf einem Umweg versuchen muß.

Die Bewegung des Elektrons in einem Bohrschen Atom ist periodisch, und die Periode τ der Bewegung findet man aus der Gleichung

$$\dot{\varphi} = \frac{me^4}{p^3}(1 + \varepsilon\cos\varphi)^2,$$

d. h.

$$\tau = \frac{p^3}{me^4}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2};$$

dabei ist die bei der Bewegung konstante Größe p_φ mit p und die Exzentrizität mit ε bezeichnet worden. Das Integral der rechten Seite läßt sich durch Einführung der „exzentrischen Anomalie" u mit Hilfe der Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos u}$$

berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = (1-\varepsilon^2)^{-3/2}\int_0^{2\pi}(1-\varepsilon\cos u)\,du$$
$$= 2\pi(1-\varepsilon^2)^{-3/2}.$$

Daher ist

$$\tau = \frac{2\pi p^3}{me^4(1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Da aber die Energie den Wert

$$W = -\frac{me^4}{2p^2}(1-\varepsilon^2) + V_0 =$$
$$= -\left(\frac{\pi^2 me^4}{2}\right)^{1/3}\tau^{-2/3} + V_0 =$$
$$= \frac{Nh}{4}\left(1 - \left[\frac{N\tau}{4}\right]^{-2/3}\right)$$

hat, so entspricht einem konstanten Wert der Energie auch ein konstanter Wert der Periode. Insbesondere entspricht jedem Atom, dessen Phasenpunkt in einer Zelle mit der Ordnungszahl n gelegen ist, eine und dieselbe Periode τ_n. Wie immer nun auch die von einem Bohrschen Atom emittierte Strahlung beschaffen sein mag, wir werden annehmen dürfen, daß sie periodisch ist, soweit es die Bewegung des Elektrons im Atom ist, und daß ihre Periode durch diejenige der Elektronenbewegung irgendwie bestimmt wird. Also entspricht allen Atomen, welche einer Zelle mit derselben Ordnungszahl n zugehören, auch dieselbe Schwingungsperiode der emittierten Strahlung. Das von der Gesamtheit der Bohrschen Atome emittierte Spektrum wird also aus Linien bestehen, und jede Linie gehört zu einer Zelle mit einer anderen Ordnungszahl.

3.

Um die Energie W_n als Funktion der Schwingungszahl der emittierten Strahlung zu bestimmen, denken wir uns die Atomgesamtheit in einen Hohlraum mit vollständig reflektierender Wandung eingeschlossen. Hierbei setzen sich die Atome ins thermodynamische Gleichgewicht mit der Strahlung, bis sich der stationäre Zu-

stand des Maximums der Entropie eingestellt hat. Wie immer dies nun auch geschehen mag, es ist sicher, daß sich ein solcher Strahlungszustand ausbilden muß, wie er durch das Plancksche Strahlungsgesetz gefordert wird. Folglich müssen sich dann die Atome verhalten wie ein Komplex Hertzscher Resonatoren, deren statistisches Gleichgewicht bekanntlich zur Aufstellung jenes Gesetzes führt. Es wäre aber nicht sachgemäß, diese Forderung an die ganze Menge der Atome zu stellen, weil sich ja unter diesen alle möglichen Schwingungszahlen vorfinden, die Gesamtheit Hertzscher Resonatoren aber nur eine bestimmte Schwingungszahl ν aufweist. Vielmehr kann mit der letzteren Gesamtheit nur jene Teilmenge von Atomen verglichen werden, deren Phasenpunkte alle in einer bestimmten Zelle mit der Ordnungszahl n sich befinden, und welche daher alle dieselbe Schwingungszahl besitzen.

Rufen wir uns für einen Augenblick die Voraussetzungen ins Gedächtnis zurück, welche nötig sind, um das Plancksche Strahlungsgesetz oder vielmehr — da es hier nicht auf die Eigenschaften des Strahlungsfeldes, sondern auf jene der Resonatorengesamtheit ankommt — das Gesetz für die mittlere Energie $\overline{E}$ der Resonatoren als Funktion der Schwingungszahl ν und der Temperatur T

$$\overline{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

zu erhalten. Man gewinnt diese Gleichung, indem man die den Resonatoren entsprechenden Phasenpunkte im zweidimensionalen Phasenraume, dessen Koordinaten die beiden Zustandsvariablen eines Resonators sind, in folgender Weise verteilt:

1. Die Zellen des Phasenraumes werden so angeordnet, daß der λten Zelle die durchschnittliche Energie

$$E_\lambda = \lambda h\nu \qquad (2)$$

zugehört.

2. Man sucht die wahrscheinlichste Verteilung der Phasenpunkte im Phasenraume unter der Voraussetzung konstanter Gesamtenergie aller Resonatoren und findet für die Verteilungszahlen w_λ (w_λ ist der Bruchteil aller Phasenpunkte, der in die λte Zelle fällt)

$$w_\lambda = ae^{-\mu E_\lambda}$$

mit den Nebenbedingungen für die Konstanten a und μ

$$\Sigma w_\lambda E_\lambda = E$$
$$\Sigma w_\lambda = 1.$$

Die Summen sind über alle Zellen des Phasenraumes zu erstrecken.

3. Man fügt das Boltzmannsche Entropieprinzip und damit die Gleichung

$$\mu = \frac{1}{kT}$$

hinzu.

Die für unsere Zwecke fundamentale Frage ist nun, in welcher Beziehung die Energie eines Bohrschen Atoms zu der eines Hertzschen Resonators stehen muß, damit sich die Atome für den Fall des Strahlungsgleichgewichts durch die Resonatoren ersetzen lassen. Es haben aber die in Betracht kommenden Atome, da ihre Phasenpunkte in einer und derselben Zelle liegen, alle dieselbe Energie W_n. Hingegen müssen die Resonatoren, damit das Plancksche Gesetz resultiere, eine bestimmte Energieverteilung aufweisen, welche durch das Gesetz 2 reguliert wird; nach diesem ist die Energie eines Resonators ein Vielfaches von $h\nu$ mit einer ganzen Zahl λ, welche für jede Zelle des Resonatoren-Phasenraumes eine andere ist. Diese beiden Tatsachen lassen sich nur in der Weise miteinander vereinigen, daß die Energie eines Atoms den kleinsten Wert aufweist, der sich bei einem der Resonatoren vorfindet, d. i. den Wert $h\nu$, so daß man, um die nötige Energieverteilung im Phasenraume der Resonatoren herzustellen, je λ Atome durch einen Resonator mit der Energie E_λ ersetzt[1]). So gelangen wir zu dem Schluß, daß

$$W_n = h\nu,$$

und erhalten nach Gleichung (1) die Balmersche Formel

$$\nu = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Es ist klar, daß man an Stelle der Balmerschen Serie auch jede andere erhalten kann,

---

1) Wählt man an Stelle des im Text angenommenen Gesetzes für die mittlere Energie eines Hertzschen Resonators das Gesetz

$$E = h\nu\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right),$$

nimmt also eine „Nullpunktsenergie" an, so muß man anstatt Gl. (2) setzen

$$E_\lambda = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)h\nu.$$

Aus dieser läßt sich aber der obige Schluß nicht mehr ziehen, weil $\lambda + \frac{1}{2}$ keine ganze Zahl ist. Dies spricht gegen die Annahme einer „Nullpunktsenergie" von der Größe $\frac{1}{2}h\nu$; in der Tat konnte ich in einer jetzt in den Denkschriften der Wiener Akademie erscheinenden Arbeit „Über die Grundlagen der statistischen Mechanik" zeigen, daß man mit Hilfe der im Text formulierten Voraussetzungen das Plancksche Strahlungsgesetz einwandfrei erhalten kann.

wenn man die entsprechende Verfügung über die den Nullpunkt der Atomenergie bestimmende Konstante V_0 trifft. So z. B. erhält man aus $W_{01} = 0$ — wenn man also die Energie der Zelle mit den niedrigsten Ordnungszahlen null setzt ($W_{10} = 0$ ist ausgeschlossen) — d. h. aus $V_0 = Nh$ die Hauptserie im Ultravioletten. Da nun einem und demselben Atom nicht gleichzeitig verschiedene Werte der Energie zukommen können, so folgt, daß die von derselben Wasserstoffmenge gleichzeitig emittierten Serien von verschiedenen Atomgruppen ausgehen; für jede von diesen gilt entsprechend den verschiedenen Werten von V_0 eine andere Energieverteilung im Phasenraum. Natürlich wird aber ein Atom nicht dauernd einer Gruppe angehören, sondern zu verschiedenen Zeiten an der Emission verschiedener Serien beteiligt sein. Diese Auffassung ist eine Folge des Umstandes, daß die Spektrallinie nicht einem einzelnen Atom zugehört, sondern das statistische Ergebnis des Zusammenwirkens einer großen Zahl von Atomen ist; und sie hängt aufs innigste zusammen mit einer Formulierung der Quantentheorie, welche ich in der oben zitierten Arbeit ausgeführt habe.

Brünn, Physikalisches Institut der k. k. Deutschen Technischen Hochschule.

(Eingegangen 28. Juli 1918.)

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1918/19[1]).

Technische Hochschule Aachen. **Starke**: Experimentalphysik I, 4; Übungen im physikalischen Laboratorium a) Praktikum, 6, b) Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl., c) Physikalisches Handfertigkeitspraktikum, 2. — **Seitz**: Mechanische Wärmetheorie, 2; Theoretische Physik, 2; Experimentalphysik enzyklopädischer Kurs, 2. — **Steubing**: Photographie I und II, 1, Übungen, 3; Drahtlose Telegraphie, 1. — **Hopf**: Relativitäts- und Gravitationstheorie, 1; Mechanik des Schiffes, 1. — **Polis**: Allgemeine Meteorologie, 2; Ausgewählte Kapitel der Meteorologie, 1. —

Universität Basel. **Hagenbach**: Experimentalphysik II: Optik, Wärme und Elektrizität, 6; Physikalisches Praktikum für Vorgerücktere, ganztägig, für Anfänger (mit Veillon und Zickendraht), 8; Physikalisches Kolloquium, 14 tägig, 2 *g*. — **Bernoulli**: Optische Methoden des Chemikers, 1, Übungen, 2; Quantentheorie und Elektronentheorie der Materie, 1; Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger, 4; Physikalisch-chemisches Vollpraktikum, tägl.; Chemisches Kolloquium (mit Rupe und Fichter), 1 *g*. — **Matthies**: Einführung in die theoretische Physik, 5, Übungen, 1 *g*; Optik: Elektromagnetische Lichttheorie, 4, Übungen, 1 *g*; Mathematisch-physikalisches Seminar: Moderne Gravitationstheorie, 2 *g*. — **Veillon**: Interferenz des unpolarisierten Lichtes, 2. — **Zickendraht**: Angewandte Elektrizitätslehre, 2; Aerodynamik und Luftfahrt, 2. —

1) Infolge der kriegsgesetzlichen Bestimmungen über Papierersparnis auf die Physiker beschränkt.

Universität Berlin. **Rubens**: Experimentalphysik II: Elektrizitätslehre und Optik, 5, Mathematische Ergänzung, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, $1^1/_2$ *g*; Arbeiten im Physikalischen Laboratorium für Geübtere (mit Wehnelt), tägl. — **Planck**: Allgemeine Mechanik, 4; Mathematisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Wehnelt**: Praktische Übungen für Anfänger I und II (mit Blasius), 7; Physikalisches Praktikum für Pharmazeuten, 3; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten, 3; Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum, 1 *g*. — **Einstein**: Relativitätstheorie, $1^1/_2$. — **Hergesell**: Temperaturverteilung in der Atmosphäre, 1. — **Schmidt**: Oszillierende Funktionen mit geophysikalischen Anwendungen, 2; Luftelektrizität, 1 *g*. — **Warburg**: Wechselströme und elektromagnetische Wellen, 2. — **Blasius**: Praktische Übungen für Anfänger, (mit Wehnelt) I: Mechanik, Schall, Wärme und Licht, 7, Übungen, 1 *g*. — **Born**: Atomistik, 1 *g*; Dynamik der Kristallgitter, 3. — **Neesen**: Elektrische Schwingungen, drahtlose Telegraphie, 2. — **Fock**: Einleitung in die Physik und Chemie, 1; Elemente der Kristallographie, 1. — **Hahn**: Radioaktivität, 1. — **Henning**: Probleme der Wärmelehre, 1. — **Hertz**: Die wichtigsten Grundbegriffe und Gesetze der Elektrizitätslehre, 1. — **Krigar-Menzel**: Theorie der Wärme, 4. — **Leo**: Praktische Witterungskunde, 2. — **Reiche**: Potentialtheorie mit Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Physik, $2^1/_2$. —

Technische Hochschule Berlin. **Kurlbaum**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Elektrizität, 4, für Architekten, 2; Physikalische Übungen, 16. — **Grunmach**: Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden, 2; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente (Physikalische Übungen), 10. — **Kalischer**: Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik II, 2; Grundzüge der Potentialtheorie und ihre Anwendungen in der Elektrizitätslehre, 2; Elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, 1. — **Korn**: Ausgewählte Kapitel der Potentialtheorie, 2. — **Krigar-Menzel**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Theorie der Wärme: Thermodynamik, 2. — **Berndt**: Radioaktivität, 1. — **Feigentraeger**: Maß- und Gewichtswesen I, 2; Die Konstruktion der Spiegel- und Linseninstrumente, 2. — **Gehlhoff**: Physikalische Grundlagen der Beleuchtungstechnik, 1. — **Kaüner**: Wetterkunde für Techniker mit Beispielen aus der Praxis, 1. — **Kock**: Hochspannungserscheinungen und Messungen, 2; Drahtlose Telegraphie und Hochfrequenztechnik, 3. — **Möller**: Schwingungsprobleme, 2. — **Petzoldt**: Raum, Zeit, Bewegung, Äther, 1 *g*. — **Pirani**: Anwendungen der graphischen Darstellung und des graphischen Rechnens auf physikalische Fragen, 1. — **Günther**: Anwendung der Photographie zum Messen in der Technik: Photogrammetrie, mit Lichtbildern und Demonstrationen, 2. —

Universität Bern. **Forster**: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Wärme, 6; Theoretische Optik, 1 *g*; Repetitorium der Physik, 2; Physikalisches Praktikum, $6^3/_4$; Wissenschaftliche Photographie: Mikrophotographie, Spektrographie, Röntgenographie, astronomische und meteorologische Photographie, 2; Arbeiten im physikalischen Institut für Vorgerückte, nach Verabredung. — **Gruner**: Elektromagnetische Lichttheorie, 3; Molekulare Wärmetheorie, 2; Einleitung in die theoretische Physik, 1; Seminar für theoretische Physik, nach Verabredung. — **Blattner**: Elektrizitätswerke und elektrische Bahnen, 1; Theorie der Wechselströme, 1. — **Luterbacher**: Überführung von der Experimentalphysik in die mathematische Physik, 2. — **Koestler**: Elektromagnetische Schwingungen, 1—2; Wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik, 2; Hochspannungs-Elektrotechnik II, 1—2; Elastizität und Festigkeit, 1—2. —

Universität Bonn. **Kayser**: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Laboratorium für Anfänger, 8; für Vorgeschrittene, tägl. — **Eversheim**:

Angewandte Elektrizitätslehre, 2; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 2; Grundzüge der Elektrotechnik, 1 *g.* — **Pflüger**: Theorie der Elektrizität, 4; Übungen, 1 *g.* — **Bucherer**: Neuere Elektrizitätslehre, 1. —

Technische Hochschule Braunschweig. **Diesselhorst**: Experimentalphysik: Elektrizität und Magnetismus, 4; Theorie des Elektromagnetismus, 3, Übungen, 1; Physikalisches Praktikum I: Einfache experimentelle Aufgaben aus allen Teilen der Physik, II: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im Laboratorium; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g.* — **Weber**: Potentialtheorie mit Anwendungen auf die Elektrostatik, 2. — **Bergwitz**: Atmosphärische Elektrizität, 1; Radioaktivität, 1. — **Witte**: Theorie des Elektromagnetismus, 4. — **Micheler**: Einführung in die Photographie, 1; Die Photographie in natürlichen Farben, 1; Spezielle Photographie, 2; Photographische Übungen, für Anfänger und Fortgeschrittene, 3. —

Universität Breslau. **Lummer**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Geübtere (mit Schaefer und Waetzmann), tägl., für Anfänger (mit Waetzmann und Ladenburg), 9. — **Schaefer**: Theorie der Wärme: Wärmeleitung, Thermodynamik, kinetische Theorie der Materie, 5, Übungen, 1½ *g*; Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten, 1; Theoretisch-physikalisches Kolloquium: Hydrodynamische Grundlagen der Flugtechnik, 2 *g.* — **Buchwald**: Vektorrechnung mit physikalischen Anwendungen, 2; Polarisation und Doppelbrechung, mit Vorführungen, 1. — **Riesenfeld**: Photographisches Praktikum, 2; Die Photographie und ihre Technik, 1 *g.* —

Technische Hochschule Breslau. **Lummer**: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Physikalisches Praktikum, 3. — **von dem Borne**: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Luftschiffahrt: Theorie der Luftschiffahrt, 2. —

Technische Hochschule Brünn. **Jaumann**: Allgemeine und technische Physik, 3½; Theoretische Physik, 1½; Physikalisches Praktikum für Chemiker und Maschinenbauer (mit Lohr), 3, für Bauingenieure (mit Szarvassi), 3. — **Szarvassi**: Elektrische Strahlen, 2. — **Lohr**: Elektromagnetische Theorien für bewegte Körper (Fortsetzung), 1. —

Technische Hochschule Danzig. **Krüger**: Experimentalphysik I, 4; Kleines physikalisches Praktikum, 4; Großes physikalisches Praktikum, tägl. — **Kalähne** (vertreten durch Federlin): Einführung in das physikalische Praktikum, 1; Theoretische Ergänzungen zur Experimentalphysik, 2; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren, 1, Übungen, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten im photographischen Laboratorium, tägl. —

Technische Hochschule Darmstadt. **Schering**: Allgemeine Physik mit Versuchen: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Geometrische Optik, Wellenlehre des Lichtes, Akustik, 5; Physikalische Übungen (mit Zeissig), 4 Nachmittage; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeissig), nach Verabredung; Mechanische Wärmetheorie, 2; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Zeissig), für Fortgeschrittene, 1 *g.* — **Zeissig**: Allgemeine Physik mit Versuchen: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Akustik, Optik, 4; Physikalische Meß- und Instrumentenkunde, 1 *g*; Seismometrie und Anwendungen, 1 *g*; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik, für Pharmazeuten, 1. —

Technische Hochschule Dresden. **Hallwachs**: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, 20; Physikalisches Kolloquium, Referate über neue Arbeiten (mit Helm und Toepler), 1 *g.* — **Toepler**: Theoretische Physik IV: Optik, 4; Ausgewählte Abschnitte aus Elektrizität und Magnetismus, 1. —

Universität Erlangen. **Wiedemann**: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 2; Physikalisches Halb- und Vollpraktikum, tägl. außer Sonnabend. — **Reiger**: Theoretische Physik, 4, Übungen, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Hauser), 1 *g.* — **Hauser**: Maschinenkunde für Chemiker und Physiker, 1. —

Universität Frankfurt a. Main. **Wachsmuth**: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Optik, 5; Die Interferenzerscheinungen des Lichtes, 1 *g*; Kleines physikalisches Praktikum, für Anfänger, 6; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 3; Großes physikalisches Praktikum, für Fortgeschrittene, tägl.; Selbständige wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **v. Laue**: Kinetische Theorie der Gase, 2. — **Seddig**: Repetitorium der Experimentalphysik, besonders für Kriegsteilnehmer, 2; Wissenschaftliche Photographie, Leitung selbständiger Arbeiten, ganz- oder halbtägig. — **Déguisne**: Der elektrische Gleichstrom (Experimental-Vorlesung), 2; Gleichstrom-Messungen, 1; Hochfrequenzströme, 1 *g*; Kolloquium über neuere Literatur der angewandten Physik, 14tägig, 2 *g*; Kleines elektrotechnisches Praktikum I, Meßtechnik, Photometrie, 3, II, Maschinen, Motore, 3; Großes elektrotechnisches Praktikum, halb- oder ganztägig; Wissenschaftliche Arbeiten, ganztägig. —

Universität Freiburg i. Br. **Himstedt**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Übungen aus der theoretischen Physik, 1 *g*; Physikalisches Praktikum, für Mediziner und Pharmazeuten, 3, für Naturwissenschaftler, 6; Physikalisches Kolloquium, 2; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Koenigsberger**: Mathematische Physik, mit Übungen: Schwingungs- und Strömungsgleichungen, 2 bis 3; Quantentheorie, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. — **Gaede**: Anleitung zu selbständigen Arbeiten im technisch-physikalischen Institut, tägl. — **Meyer**: Elektrochemie, 2; Photographie mit praktischen Übungen und Demonstrationen, 2; Mechanische Wärmetheorie, 2; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum, 2; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten, tägl. — **Friedrich**: Ausgewählte Kapitel aus der Optik, 1; Physikalisches Seminar, 1; Einführung in die Elektrotechnik für Mediziner, 1; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus dem Gebiete der Experimentalphysik, tägl. —

Universität Freiburg (Schweiz). **Gockel**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physik der Atmosphäre, 2; Physikalisches Kolloquium, 1; Physikalisches Praktikum für Mediziner, 6; Physikalische Arbeiten im Laboratorium, tägl. — **Joye**: Allgemeine Physik: Elektrizität, 4; Praktische Übungen für Anfänger und Chemiker, 8; Physikalisches Laboratorium, für Vorgerücktere, tägl. außer Montag; Arbeiten im Laboratorium, tägl.; Physikalisches Seminar, 1. — **v. Hauer**: Radioaktivität, 2; Theorie der Aggregatzustandsänderungen, 2. —

Universität Gießen. **König**: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Physikalisches Praktikum für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 6, für Vorgeschrittene, nach Verabredung, für Chemiker, Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten, tägl.; Physikalisches Seminar für Lehramtskandidaten; Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak), 14tägig, 2 *g*; Physikalisches Kolloquium (mit Fromme), 14tägig, 2. — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum, 3; Kinetische Gastheorie und Elektronenlehre, 1. — **Uller**: Einführung in die elektrische Gleich- und Wechselstromtechnik, 1. — **Fromme**: Elektromagnetische Lichttheorie, 4; Theoretisch-physika-

lische Übungen, 1. — **Jentzsch**: Elektrische Schwingungen, 1; Ausgewählte Kapitel aus der physiologischen Optik, 1. — **Peppler**: Grundzüge der Wettervoraussage mit Berücksichtigung der dynamischen Prognose, 2. —

Universität Göttingen. **Debye**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, mit besonderer Berücksichtigung der Physiker und Mathematiker, 4; Physikalisches Praktikum (mit Simon), 4; Wissenschaftliche Arbeiten im Physikalischen Institut, tägl.; Kolloquium über neuere physikalische Literatur (mit Voigt), 2 *g*; Struktur von Spektrallinien, 2. — **Voigt**: Optik, 4, Übungen, 2 *g*; Einführung in die Mechanik der Kontinua: Hydrodynamik, Elastizität, 2 *g*. — **Wiechert**: Grundlinien der Theorie der Elektrizität, 2; Erdbeben, Ebbe und Flut und verwandte Erscheinungen in ihren Beziehungen zur Beschaffenheit des Erdkörpers, 2; Erdbeben, 1 *g*; Geophysikalisches Praktikum, nach Verabredung *g*. — **Simon**: liest nicht wegen Erkrankung. — **Pohl**: Experimentalphysik II, für Naturwissenschaftler und Mediziner, 4. — **N. N.**: Radioaktivität, 2 *g* Kinetische Theorie der Materie, 2. —

Universität Graz. **N. N.**: Experimentalphysik I, für Mediziner, zugleich Einführung in die Physik für Lehramtskandidaten, 4; Physikalische Übungen I für Chemiker und Naturhistoriker, 6 *g*, II für Mathematiker und Physiker, 6 *g*; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. außer Sonnabend *g*. — **Streintz**: Schwingungslehre und Akustik, 2. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3 *g*. — **Waßmuth**: Über Jourdain's Prinzip der Mechanik und dessen Anwendung auf physikalische Fragen, 1 *g*. — **Radakovic**: Seminar für theoretische Physik, 2 *g*; Besprechung physikalischer Fragen, 1 *g*. —

Technische Hochschule Graz. **v. Ettingshausen**: Physik, 5; Elektrotechnik, $3^1/_2$, Übungen: Praktische Messungen, 8; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. — **Streintz**: Physik: Mechanik, Optik und Wärmelehre, 5, für Geodäten: Mechanik und geometrische Optik, 5. —

Universität Greifswald. **Stark**: Experimentalphysik II: Elektrodynamik, Atomdynamik, Optik, Thermodynamik, 5; Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler, 6, für Mediziner und Pharmazeuten, 2; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen, tägl.; Besprechung neuer physikalischer Arbeiten, 14tägig, 2 *g*. — **Seeliger**: Theoretische Physik, 3. —

Universität Halle. **Mie**: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, 5; Physikalische Übungen für Naturwissenschaftler, 6, Erläuterungen, 2 *g*; Kleines physikalisches Praktikum für Mediziner, Pharmazeuten und Landwirte, 3; Leitung selbständiger Arbeiten, tägl. — **Schmidt**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Übungspraktikum für angewandte Physik, 4; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Physikalisches Kolloquium, 14tägig, 2 *g*. — **Herweg**: Spektroskopie, mit Experimenten, unter Berücksichtigung der neueren Anschauungen, insbesondere der Quantentheorie, 2. — **Wigand**: Elektronen und Ionen, 1. — **Thiem**: Photographischer Kursus, 2. —

Technische Hochschule Hannover. **Precht**: Experimentalphysik, 4; Arbeiten im Laboratorium der Physik (mit Leithäuser), 4. — **Leithäuser**: Grundzüge der Physik, 3; Praktische Physik, 2; Photographie, 4. —

Universität Heidelberg. **Lenard**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 4; Physikalisches Praktikum (mit Becker), 6; Physikalisches Seminar und Kolloquium, 1 *g*; Wissenschaftliche Arbeiten Fortgeschrittener im physikalischen und radiologischen Institut (mit Becker), tägl. außer Sonnabend. — **Becker**: Theoretische Mechanik, 4; Kinetische Gastheorie, 1; Theoretisch-physikalische Übungen, 1 *g*. — **Schmidt**: Photographische Kurse für Anfänger und Vorgeschrittene, 2. —

Universität Innsbruck. **v. Schweidler**: Experimentalphysik I, 4; Einführung in die messende Physik, 1; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6, für Mediziner, 3; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g*. — **Tumlirz**: Theoretische Mechanik, 5; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar, 2 *g*. — **March**: Theorie der Strahlung und der Quanten, 1. — **v. Lerch**: Physik für Pharmazeuten, 5. — **Hammerl**: Elektrische Energieverteilung: Licht und Kraft, Niederspannungs- und Hochspannungsanlagen, 2 *g*. —

Universität Jena. **Wien**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik, 4, IV: Elektrizität, Magnetismus, Optik, für Fortgeschrittene, 2; Physikalisches Kolloquium; Physikalisches Praktikum (mit Pauli): a) für Mathematiker und Physiker, 6, b) für Chemiker, Pharmazeuten und Mediziner, 3; Leitung physikalischer Spezialuntersuchungen (mit Straubel und Pauli), tägl. — **Auerbach**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Grundzüge der Wetterkunde, 2; Anleitung zu Demonstrationen und Experimenten, 2. — **Straubel**: Abbildungstheorie, 1. —

Technische Hochschule Karlsruhe. **Lehmann**: Physik, 4, Ergänzungen, 2; Physikalisches Laboratorium (mit Schachenmeier), 6; Seminar für Experimentalphysik (mit Schachenmeier), 2 *g*. — **N. N.**: Mathematische Physik, 3; Repetitorium der Physik, 2. — **Schachenmeier**: Optik mit besonderer Berücksichtigung der Elektronentheorie, 2. — **Schmidt**: Photographische Kurse, mit Vorträgen über die Theorie der photographischen Vorgänge, für Anfänger und Vorgeschrittene, 2. — **N. N.**: Meteorologie: Klimatologie, 1. —

Universität Kiel. **Dieterici**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalisches Anfänger-Praktikum, a) für Mathematiker und Naturwissenschaftler, 8, b) für Mediziner und Pharmazeuten, 4; Physikalisches Praktikum für Doktoranden, tägl.; Repetitorium für Oberlehrer-Kandidaten (Kriegsteilnehmer), 2 *g*; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Weber**: Einleitung in die theoretische Physik und analytische Mechanik, 4; Absolutes Maßsystem, 1; Theorie physikalischer Messungsapparate, mit Übungen, 1; Ausgewählte physikalische Untersuchungen, tägl. außer Sonnabend. — **Martienssen**: Physikalische Grundlagen der Flugtechnik, 1. —

Universität Königsberg. **Kaufmann**: Allgemeine Physik II: Elektrizität, Licht, 5; Seminaristische Übungen zur Geschichte der Experimentalphysik (mit Hoffmann), 2 *g*; Physikalische Übungen, 6; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl. *g*. — **Volkmann**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Mathematisch physikalisches Seminar: Physikalisch-theoretische Übungen und Arbeiten, Vorträge und Besprechungen im Anschluß an die Vorlesungen und an die höhere Literatur, 1 *g*; Mathematisch-physikalisches Laboratorium. Physikalisch-praktische Übungen und Arbeiten für Anfänger und Vorgerückte, 6. — **Hoffmann**: Technische Mechanik und Thermodynamik, 1. — **Schroeder**: Einführung in die Maschinenkunde II, 2; Besichtigung industrieller Anlagen, *g*. —

Universität Leipzig. **Wiener**: Experimentalphysik II: Licht, Magnetismus, Elektrizität, 5; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Scholl), tägl.; Physikalische Übungen (mit Scholl), 6, für Mediziner und Pharmazeuten, 3; Physikalisches Kolloquium (mit Des Coudres), 2 *g*. — **Des Coudres**: Thermodynamik, 4; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene (mit Fredenhagen), tägl. — **v. Oettingen**: Das duale Harmoniesystem, 1 *g*. — **Scholl**: Entwicklung der Elektrotechnik und ihrer Anwendungsgebiete, mit Berücksichtigung wirtschaftlicher Fragen, 2. — **Wenger**: Dynamische Meteorologie, 2; Arbeiten im Geophysikalischen Institut, tägl.; Geophysikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Marx**: Entladungen in

Gasen: Kathoden und Röntgenstrahlen, 1; Struktur der Kristalle, 1. — **Haas**: Geschichte der Physik von Galilei bis zum Ende des 18. Jahrhunderts, 1 *g*; Die kinetische Theorie der Materie, 1; Selbständige geschichtlich-physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene, nach Verabredung, *g*. — **Lilienfeld**: Erzeugung und Anwendung tiefer Temperaturen, 1 *g*. —

Universität Marburg. **Richarz**: Experimentalphysik: Wärme, Magnetismus, Elektrizität, 5; Übersicht über die Experimentalphysik als Wiederholung für Kriegsteilnehmer, 1 *g*; Physikalisches Kolloquium, 2; Physikalisches Praktikum (mit Schulze), 6; Leitung eigener Untersuchungen, tägl. — **N. N.**: Theoretische Physik: Wärmetheorie, 4; Theoretisch-physikalisches Seminar, 2 *g*. — **N. N.**: Geschichte der Physik, 2; Astronomische Zeit- und Ortsbestimmungen 1, Übungen, 2; Seminaristische Übungen über theoretische Physik, mit schriftlichen Arbeiten, 2. — **Schulze**: Relativitätstheorie, 2; Übersicht über die theoretische Physik, als Wiederholung für Kriegsteilnehmer, 1 *g*. — **Take**: Interferenz, Beugung, Polarisation und Kristalloptik, mit Versuchen, 2. — **Wegener**: Allgemeine Meteorologie 2. —

Universität München. **Röntgen**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Optik, 5; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen im physikalischen Laboratorium (mit Koch und Wagner), 4. — **Sommerfeld**: Thermodynamik einschließlich kinetischer Gastheorie, 4, Übungen, 1 *g*; Atombau und Spektrallinien, 1; Quantentheorie, 1. — **Graetz**: Experimentalphysik I: Einleitung, Wärme, Elektrizität, 5; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen, 4; Einleitung in die theoretische Physik, 3; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus der Physik, nach Verabredung *g*. — **Koch**: Die lichtelektrischen Erscheinungen, mit Demonstrationen, 1. — **Wagner**: Neuere Forschungen auf dem Gebiete der Röntgenstrahlen, 1. — **Donle**: Einführung in die elektromagnetische Theorie des Lichtes, 2. — **Ewald**: Vektoranalysis, als Einführung in die theoretische Physik, 3. —

Technische Hochschule München. **Zenneck**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Optik, 6; Physikalisches Praktikum, 4 oder 8; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiete der Physik, 12 bis 30. — **Fischer**: Grundzüge der Physik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre, 3; Praktisch-physikalische Übungen: Aufbau und Handhabung von Apparaten, 4; Elektrizität und Magnetismus in mathematischer Behandlung, 4; Einführung in die wissenschaftlichen Arbeitsmethoden der Physik: Anleitung zu selbständigen Untersuchungen, 8 bis 30. — **Knoblauch**: Anwendungen der Thermodynamik auf physikalisch-chemische Erscheinungen, 2; Technisch-physikalisches Praktikum, 4; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten auf dem Gebiete der technischen Physik, nach Verabredung. — **Emden**: Meteorologie und Klimatologie, 2; Kugelfunktionen, mit besonderer Berücksichtigung physikalischer und geophysikalischer Probleme, 2. — **Dieckmann**: Ausgewählte Kapitel der Telegraphen- und Sendezwecke, 2, Übungen, 3; Elektronenröhren für Verstärkungs- und Sendezwecke, 1; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen aus dem Gebiete der angewandten Physik, nach Verabredung. — **von und zu Aufseß**: Populäre Astrophysik I, 2. — **Schröter**: Mechanische Wärmetheorie, 2, Übungen, 1. — **Urban**: Unterrichtskurse in praktischer Photographie (Vorträge und Übungen), 1, Praktische Übungen, 3. —

Universität Münster. **Schmidt**: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Anfänger, 3 oder 6, für Fortgeschrittene (mit Konen), tägl. — **Konen**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, 4; Seminar für theoretische Physik, 2 *g*. —

Akademie Posen. **Spies**: Über Röntgenstrahlen, ihre Theorie und Anwendung, 4. —

Universität Prag. **Lampa**: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 bzw. 3; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten für Vorgeschrittene, tägl. *g*. — **Frank**: Theoretische Optik, 3; Allgemeine Relativitätstheorie, 2; Besprechung neuerer Arbeiten über Röntgenstrahlen, 2. — **Spitaler**: Allgemeine Meteorologie, 4; Meteorologisches Praktikum, 1. —

Technische Hochschule Prag. **Tuma**: Experimentalphysik, 5, für Kulturingenieure und Geodäten, 3; Physikalisches Praktikum, für Chemiker, 6, für Maschinenbauer und Elektrotechniker, 3, für Lehramtskandidaten, 6. —

Universität Rostock. **Heydweiller**: Experimentalphysik: Optik, Magnetismus, Elektrizität, 5; Physikalische Übungen, 4; Physikalisches Seminar, nach Verabredung. — **Weber**: Einführung in die theoretische Physik, 3; Thermodynamik, 2; Übungen zur theoretischen Physik, 1; Vektoranalysis, 1. —

Universität Straßburg. **N. N.**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, 5; Physikalische Übungen, 5 oder 10; Übersichtskursus für Mediziner, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten, tägl. außer Sonnabend. — **Cohn**: Einleitung in die theoretische Physik, 3; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten. — **Rohmann**: Der Kreisel, Theorie und Anwendungen, 2. — **Hecker**: Erdmagnetismus, 1; Ausgewählte Kapitel aus der Geophysik, 1. —

Technische Hochschule Stuttgart. **v. Koch**: Experimentalphysik, 4; Theoretische Physik (als Einleitung: Mathematische Ergänzung zur Experimentalphysik), 2; Physikalisches Praktikum, tägl. außer Sonnabend; Handfertigkeitspraktikum in Physik, 2—3; Physikalisches Kolloquium, 2; Meteorologie, 1. —

Universität Tübingen. **Paschen**: Experimentalphysik: Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrizität, 5. — **Rosenberg**: Populäre Astronomie, 2 *g*. —

Universität Wien. **Lecher**: Experimentalphysik für Lehramtskandidaten und Mediziner I, 5; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Franz Exner**: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl, — **Jäger**: Mechanik, 5. — **Meyer**: Radioaktivität, 3; Besprechung neuerer Arbeiten (mit Jäger und Ehrenhaft), 1 *g*. — **Ehrenhaft**: Grundzüge der neueren Elektrizitätstheorie, 5. — **Haschek**: Optik, 3. — **Hess**: Besprechung der neuesten Arbeiten aus dem Gebiete der Radioaktivität, 1. — **Kohlrausch**: Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, 6. — **Schrödinger**: Anleitung zu theoretisch-physikalischen Arbeiten, 1 *g*. — **Thirring**: Röntgeninterferenzen und Kristallstruktur, 2. — **Flamm**: Statistische Probleme der Physik, 2. — **Kottler**: Elastizitätstheorie und Anwendungen, 1. — **Felix v. Exner**: Ausgewählte Kapitel aus der Geophysik, 3. — **Defant**: Beobachtungstatsachen und Theorien der Gezeitenerscheinungen, 1. — **Schmidt**: Versuche zur Meteorologie, 1. — **Hinterberger**: Photographisches Praktikum, 12; Praktischer Kurs über Mikrophotographie, 20. —

Technische Hochschule Wien. **N. N.**: Physik für Bauingenieure, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2; Optik, für Geodäten, 2. — **Mache**: Physik für Maschinenbauer und technische Chemiker, 5. — **Flamm**: Die Feinstruktur der Materie, 1. — **Aigner**: Die Physik der elektrischen Meßapparate und ihre praktische Anwendung, 1. — **Lizнar**: Meteorologie und die wichtigsten Lehren der Klimatologie für Ingenieure, 2. —

Universität Würzburg. Wien: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrostatik, 5; Praktische Übungen, 4 u. 8; Anleitung zu selbständigen Arbeiten, tägl.; Praktische Übungen für Pharmazeuten, Mediziner und Zahnärzte, 4. — **Harms**: Wärmelehre, 4. —

Universität Zürich. Meyer: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme, 4; Ausgewählte Kapitel der Physik, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger, $3^1/_2$, für Vorgerücktere, halbtägig, tägl. außer Sonnabend; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Physikalisches Kolloquium, 2 *g*. — **Greinacher**: Radiologie III: Kathoden-, Kanal-, Anoden-, Röntgenstrahlen, mit Experimenten, 1; Radiologisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Mediziner, $3^1/_2$. — **Ratnowsky**: Theorie der Wärme; Thermodynamik, 4, Übungen, 1; Kinetische Theorie der Gase, 2. — **Wolfke**: Maxwellsche Gleichungen der Elektrodynamik, 2. —

Technische Hochschule Zürich. Weiss: Physik, 4. Repetitorium, 1; Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Schweitzer), 4 und 8; Wissenschaftliche Arbeiten im physikalischen Institut, 8, 12, 24. — **Brentano**: Elektronentheorie auf optischem und elektrischem Gebiet, 2 *g*. — **Piccard**: Physik und Chemie der Radioelemente, 2 *g*. — **de Quervain**: Ausgewählte Kapitel der Wetterkunde, mit Übungen, 1. — **Schweitzer**: Physik I, 3, Repetitorium, 1; Optik, 2; Experimentalphysik II, 4, Repetitorium, 1. — **Treadwell**: Ausgewählte Kapitel der neueren Atomistik II, 1. — **Weyl**: Theorie des elektromagnetischen Feldes, 4; Integralgleichungen, 2; Determinanten, 1. — **Wolfke**: Einführung in die kinetische Theorie der Gase, 2 *g*. — **Barbieri**: Photographie I, 2 *g*; Photographisches Praktikum, 2. —

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Würzburg Dr. Siegfried Skraup für Chemie.

Ernannt: Dr. T. Bonnesen zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule Kopenhagen, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Brünn Dr. A. Leon zum ord. Professor der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule Graz, der a. o. Professor an der Universität Marburg Dr. Oskar Keller zum ord. Professor der Pharmazie und Nahrungsmittelchemie an der Universität Jena, der a. o. Professor an der Deutschen Universität Prag Dr. Viktor Rothmund zum ord. Professor für physikalische und Elektrochemie ebendaselbst.

Verliehen: Dem ord. Professor der Mathematik i. R. an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Friedrich Graefe der Titel Geh. Hofrat, dem Dozenten für Photographie an der Technischen Hochschule Aachen, Dr. Walter Steubing der Titel Professor.

Ehrungen: Der „Alfred-Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften" ist dem Ordinarius der Mathematik an der Universität Göttingen Prof. Dr. Ludwig Prandtl für seine Arbeit über „Den Luftwiderstand von Kugeln" zuerkannt worden.

Gestorben: Der ehemalige Professor der Mathematik an der Universität Helsingfors Dr. E. R. Neovius, der a. o. Professor der Chemie an der Universität Lemberg Dr. Stanislaus Opolski, der a. o. Professor für Mathematik an der Universität Wien Dr. Wilhelm Groß, der Professor für Chemie an der Medical School der Northwestern University Chicago John Harper Long.

Angebote.

Für die wissenschaftliche und technische Bearbeitung von Fragen aus dem Gebiete der Schwachstromkabeltechnik

1—2 Physiker

oder

diplom. Ingenieure

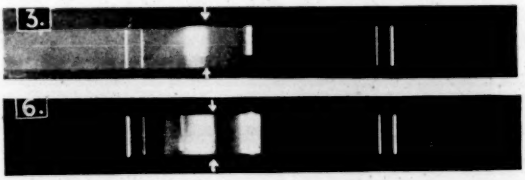
sofort gesucht. Angebote mit Angabe der Gehaltsansprüche, der bisherigen Tätigkeit und des Militärverhältnisses erbeten unter **S. H. 530** an den Verlag dieser Zeitschr. S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.

Gesuche.

Absolvierter Physiker

(Dr. phil. Universitätsassistent), praktisch begabt, guter Zeichner; sucht nach Kriegsende Anstellung in größerem techn. Betrieb. Anträge mit Bedingungen unter **G. H.** an den Verlag S. Hirzel, Leipzig, Königstr. 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.


3.
6.

POLYPHOS · MÜNCHEN

SCHILLER-STR. 16

o o Spezialfabrik für Röntgenapparate o o

Die

Ventil-Vakuum-röhre

„Constanz",

(2 D.R.P., 2 D.R.G.M.)

hat sich zur **Unterdrückung der ungewünschten Stromphase** in **vieljähr.** Verwendung

glänzend bewährt.

Sie zeigt im Gegensatz zu anderen Ventilröhren bei richtiger Härte **keine Fluoreszenz** des Glases.

Dr. Loose, Bremen, schreibt u. a.: **„Ich begrüße diese Röhre als einen wesentlichen Fortschritt".**

Neu und hervorragend wichtig ist die

Präzisions-Durchleuchtungs-röhre nach Dr. Rosenthal.

Sie erzeugt Durchleuchtungsbilder von **unerreichter Schärfe** und **prachtvoll. Kontrast.**

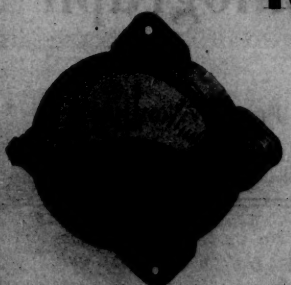
Prof. Dr. H. Rieder, München, schreibt am 29. Dez. 1917:

Die neue **Rosenthalsche Präzisionsröhre** bedeutet nach mein. Ansicht einen **Fortschritt** in der Röntgenoskopie. Zum so **vorzügliche, scharfe und kontrastreiche** Durchleuchtungsbilder der Lunge, wie ich sie **bisher nie gesehen habe.** Ebenso ergeben **Schädel-** u. Untersuchungen auf **kleinste Fremdkörper** im Auge ein **überraschend gutes Resultat.** Auch bei **langdauernden** Durchleuchtungen hat sie sich **bestens bewährt,** da sie Wasserkühlung besitzt. Seitdem genannten Röhre kennen gelernt habe, **möchte ich** keine andere mehr für Durchleuchtungen verwenden.

Siemens & Halske A.-G.

Wernerwerk — Siemensstadt bei Berlin

Messinstrumente für drahtlose Telegraphie



Kleiner Hitzdraht-Stromzeiger für Hochfrequenz, mit eingebautem Nebenschluß

Stromzeiger in allen Größen von 60 bis 700 mm Durchmesser für alle Stromstärken bis 1000 Ampere

Kleine, widerstandsfähige und wohlfeile Typen für Stromstärken bis 10 Amp., mit eingebautem Nebenschluß, verwendbar für Gleich- und Wechselstrom bis zu den höchsten Frequenzen ($\lambda = 100$ m) mit maximal etwa 5 % Frequenzfehler.

Für hohe Stromstärken Sonderausführungen ohne Nebenschluß, nur für Hochfrequenz, jedoch unabhängig von der Wellenlänge, dabei mit Gleichstrom eichbar.

Literatur: Jahrbuch f. drahtlose Telegr., Band 11, Heft 1: Keinath „Über die Messung hoher Stromstärken bei Hochfrequenz".